

ES927 – Controle de Sistemas Robóticos

Controle Independente de Juntas

Camino, J. F.

DPM / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 2 de abril de 2014

Nota ao leitor

- Este material é baseado principalmente nas referências:
 - M. W. Spong, S. Hutchinson and M. Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*, John Wiley & Sons, 2006
 - J. J. Craig, *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, 3rd ed., Pearson Prentice Hall, 2005.

Estrutura básica

- A figura abaixo apresenta a estrutura mais simples de controle.

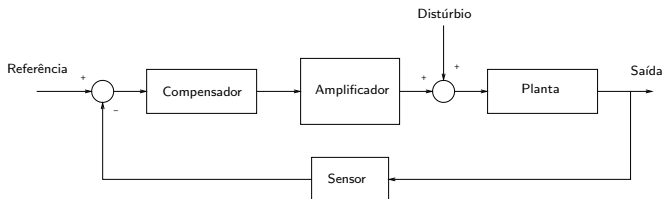


Figura: Estrutura básica de controle SISO.

- Cada junta do manipulador é controlado de forma independente, considerando o sistema como sendo SISO.
- Os efeitos do acoplamento entre os elos são tratados como distúrbios.
- O objetivo é projetar um compensador de forma que a saída da planta siga uma entrada de referência desejada.
- O controlador também deve ser capaz de rejeitar o distúrbio.

Dinâmica do atuador

- Considere o motor CC de ímã permanente da figura abaixo.

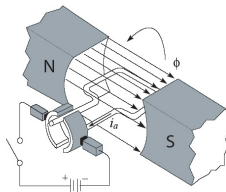


Figura: Princípio de operação do Motor CC de ímã permanente.

- Para esse sistema, o torque do motor τ_m [Nm] é dado por

$$\tau_m = K_1 \phi i_a$$

onde ϕ é o fluxo magnético [weber], i_a é a corrente na armadura [ampère] e K_1 é uma constante.

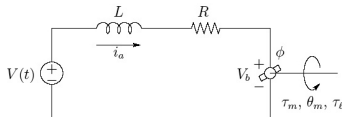
- A força contra-eletromotriz V_b [volt] é dada por

$$V_b = K_2 \phi \omega_m$$

onde ω_m é a velocidade angular do rotor [rad/sec] e K_2 é uma constante.

Dinâmica do atuador

- O torque do motor é controlado pela corrente da armadura i_a .



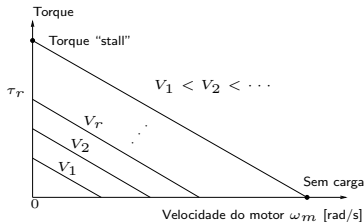
- A equação diferencial que governa o circuito acima é

$$L \frac{di_a}{dt} + Ri_a = V - V_b$$

- Como o fluxo da armadura é constante, temos

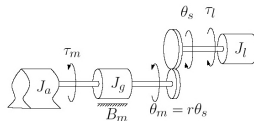
$$\tau_m = K_m i_a, \quad \text{e} \quad V_b = K_b \frac{d\theta_m}{dt}$$

- Curvas de torque versus velocidade



Modelo SISO do manipulador

- Neste modelo, J_a , J_g e J_l são respectivamente as inércias do atuador, da engrenagem e da carga. O coeficiente de amortecimento é B_m e a relação de transmissão é $\eta = r$. Definimos a inércia do motor por $J_m = J_a + J_g$.



- A equação que governa o sistema é dada por

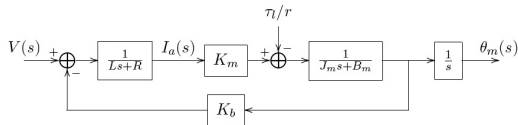
$$J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} = \tau_m - \tau_l/\eta = K_m i_a - \tau_l/\eta$$

- Combinando as equações e aplicando Laplace, temos

$$(Ls + R)I_a(s) = V(s) - sK_b\Theta_m(s)$$

$$(J_ms^2 + B_ms)\Theta_m(s) = K_m I_a(s) - \tau_l(s)/\eta$$

- O diagrama de blocos para este sistema é



Modelo SISO do manipulador

- Assim, obtemos as seguintes funções de transferência:

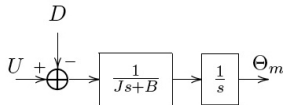
$$\frac{\theta_m(s)}{V(s)} = \frac{K_m}{s[(Ls + R)(J_m s + B_m) + K_b K_m]}$$

$$\frac{\theta_m(s)}{\tau_l(s)} = \frac{-(Ls + R)/\eta}{s[(Ls + R)(J_m s + B_m) + K_b K_m]}$$

- O efeito do torque de carga τ_l no ângulo do motor θ_m é reduzido pela constante η , que geralmente está entre 20 a 200 (ou mais).
- Em geral, a constante de tempo elétrica L/R é significativamente menor que a constante de tempo mecânica J_m/B_m . Assim o sistema se reduz a

$$\frac{\theta_m(s)}{V(s)} = \frac{K_m/R}{s(J_m s + B_m + K_b K_m/R)}$$

$$\frac{\theta_m(s)}{\tau_l(s)} = \frac{-1/\eta}{s(J_m s + B_m + K_b K_m/R)}$$



Malha aberta do sistema simplificado. Distúrbio D representa os efeitos das não-linearidades e dos acoplamentos.

- A equação diferencial correspondente é

$$J_m \ddot{\theta}_m(t) + (B_m + K_b K_m/R) \dot{\theta}_m(t) = (K_m/R)V(t) - \tau_l(t)/\eta$$

ou na forma compacta: $J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta} = u(t) - d(t)$

onde $\theta = \theta_m$, $B = (B_m + K_b K_m/R)$, $u = (K_m/R)V(t)$ e $d = \tau_l(t)/\eta$.

Rastreamento de uma referência constante θ^d

Compensador PD

- Compensador da forma PD:

$$U(s) = K_P(\Theta^d(s) - \Theta(s)) - K_D s\Theta(s)$$

- O sistema em malha fechada fica sendo

$$\Theta(s) = \frac{K_P}{\Omega(s)}\Theta^d(s) - \frac{1}{\Omega(s)}D(s)$$

onde Ω é o polinômio característico:

$$\Omega(s) = Js^2 + (B + K_D)s + K_P$$

- O sistema será estável para quaisquer: $K_P > 0$ e $K_D > -B$.
- O erro de rastreamento $E(s) = \Theta^d(s) - \Theta(s)$ é dado por

$$E(s) = \frac{Js^2 + (B + K_D)s}{\Omega(s)}\Theta^d(s) + \frac{1}{\Omega(s)}D(s)$$

- Para uma entrada em degrau e um distúrbio constante d , o erro estacionário é

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{d}{K_P}$$

- Como o sistema é de segunda ordem, dados ζ e ω , temos

$$s^2 + \frac{(B + K_D)s}{J} + \frac{K_P}{J} = s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2 \rightarrow K_P = \omega^2 J, \quad K_D = 2\zeta\omega J - B$$

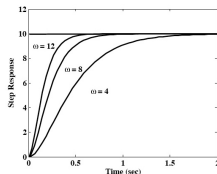
Rastreamento de uma referência constante θ^d

Compensador PD: Exemplo numérico

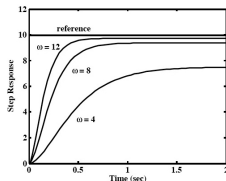
- Seja $\zeta = 1$ e $J = B = 1$. Então o polinômio característico é

$$p(s) = s^2 + (1 + K_D)s + K_p$$

- Suponha que o distúrbio seja $d = 0$. Neste caso, o erro estacionário é nulo como visto na figura abaixo, que apresenta a resposta ao degrau $\theta^d = 10$ em função de ω .



- Suponha agora que o distúrbio seja $d = 40$. Neste caso, existe um erro estacionário ao degrau, como visto na figura abaixo. Este erro diminui à medida que ω aumenta.



Rastreamento de uma referência constante θ^d

Compensador PID

- Compensador da forma PID:

$$U(s) = (K_P + \frac{K_I}{s})(\Theta^d(s) - \Theta(s)) - K_D s\Theta(s)$$

- O sistema em malha fechada fica sendo

$$\Theta(s) = \frac{K_P s + K_I}{\Omega(s)} \Theta^d(s) - \frac{s}{\Omega(s)} D(s)$$

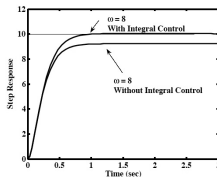
onde Ω é o polinômio característico:

$$\Omega(s) = Js^3 + (B + K_D)s^2 + K_P s + K_I$$

- Critério de estabilidade implica:

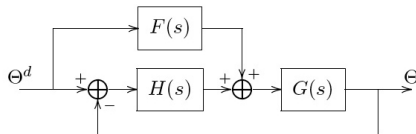
$$K_I < (B + K_D)K_P/J, \quad K_P > 0, \quad K_D > -B, \quad K_I > 0$$

- Considere os dados numéricos anteriores e que o distúrbio seja $d = 40$. Percebe-se agora, pela figura abaixo, que o erro estacionário ao degrau $\theta^d = 10$ é nulo.



Controle “Feedforward”

- O PID anterior não é capaz de seguir uma referência variante $\theta^d(t)$. Porém, se um termo “Feedforward” for inserido, o sistema será capaz de seguir referências variantes.
- A figura abaixo apresenta a estrutura de controle por pré-alimentação, onde $G(s)$ é a planta, $F(s)$ é o compensador “Feedforward” e $H(s)$ é o compensador “Feedback”.



- Assume-se que $G(s)$ é estritamente própria e $H(s)$ é própria.
- Considere que as funções de transferência têm a seguinte forma

$$G(s) = \frac{q(s)}{p(s)}, \quad H(s) = \frac{c(s)}{d(s)}, \quad F(s) = \frac{a(s)}{b(s)}$$

- A função de transferência em malha fechada $T(s) = \Theta(s)/\Theta^d(s)$ é

$$T(s) = \frac{q(s)(c(s)b(s) + a(s)d(s))}{b(s)(p(s)d(s) + q(s)c(s))}$$

- Para assegurar estabilidade, $F(s)$ e $H(s)$ são escolhidos de tais forma que

$$p(s)d(s) + q(s)c(s) \quad \text{e} \quad b(s) \quad \text{sejam Hurwitz}$$

Controle “Feedforward”

- Se $G(s)$ for de fase mínima e estritamente própria, uma possível escolha é

$$F(s) = 1/G(s)$$

- Assim o sistema em malha fechada fica sendo

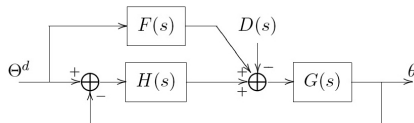
$$q(s)(p(s)d(s) + q(s)c(s))\Theta(s) = q(s)(p(s)d(s) + q(s)c(s))\Theta^d(s)$$

ou em termos do erro de rastreamento $E(s) = \Theta^d(s) - \Theta(s)$:

$$q(s)(p(s)d(s) + q(s)c(s))E(s) = 0$$

- Assumindo estabilidade, a saída $\Theta(s)$ rastreará qualquer entrada $\Theta^d(s)$.
- Se houver uma entrada de distúrbio $D(s)$, o erro $E(s)$ de rastreamento é

$$E(s) = \frac{q(s)d(s)}{p(s)d(s) + q(s)c(s)}D(s)$$

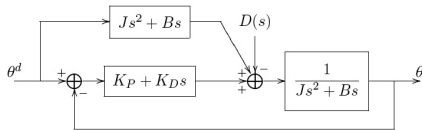


Controle “Feedforward”

- Considere a planta $G(s)$ e o controlador $H(s)$, do tipo PD, dados por

$$G(s) = \frac{1}{Js^2 + Bs}, \quad H(s) = K_P + K_D s$$

- Como a planta $G(s)$ é de fase mínima, temos que $F(s) = Js^2 + Bs$:



- Perceba que $F(s)$ não é uma função racional própria. No entanto, isto não é um obstáculo prático para a sua implementação já que a referência $\theta^d(t)$ é conhecida.
- No domínio do tempo, a lei de controle é dada por

$$u(t) = J\ddot{\theta}^d + B\dot{\theta}^d + K_D(\dot{\theta}^d - \dot{\theta}) + K_P(\theta^d - \theta)$$

- Para um distúrbio constante d , a equação do erro $e(t)$ em malha fechada fica sendo

$$J\ddot{e}(t) + (B + K_D)\dot{e}(t) + K_P e(t) = d$$

- Caso um PID seja utilizado, equação do erro $e(t)$ em malha fechada será

$$J\ddot{e}(t) + (B + K_D)\dot{e}(t) + K_P e(t) + K_I e(t) = \dot{d} = 0$$

Controle "Feedforward"

Exemplos

- Sistema mecânico: $J = B = 1$.
- Distúrbio: $d = 100$ em $t = 3$ s.
- Controlador PD: $K_P = 64$, $K_D = 15$.

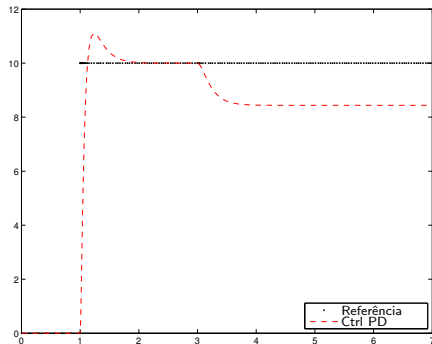


Figura: Referência $\theta^d = 10$.

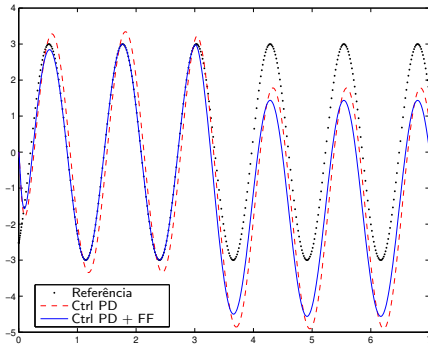


Figura: Referência $\theta^d = 3 \sin(5t - 1)$.

Controle "Feedforward"

Exemplos

- Sistema mecânico: $J = B = 1$.
- Distúrbio: $d = 100$ em $t = 3$ s.
- Controlador PID: $K_P = 64$, $K_D = 15$, $K_I = 100$.

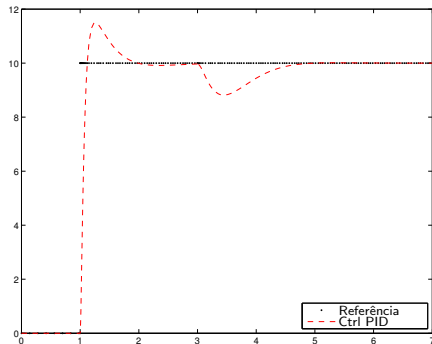


Figura: Referência $\theta^d = 10$.

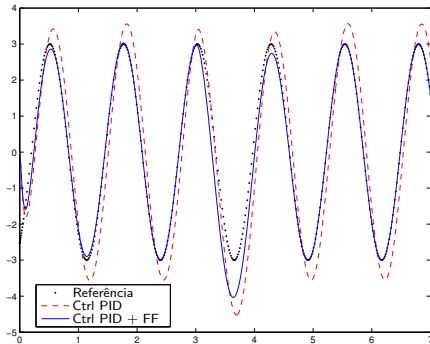
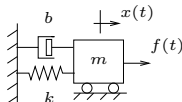


Figura: Referência $\theta^d = 3 \sin(5t - 1)$.

Controle de sistemas de segunda ordem

Controle de regulação de posição

- Considere a figura abaixo onde $f(t)$ é uma força de controle atuando na massa m .



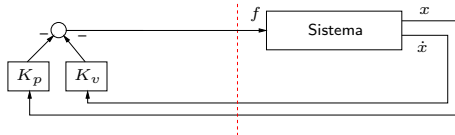
- A equação de movimento é dada por

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

- O objetivo é determinar uma lei de controle $f(t)$ tal que o sistema em malha fechada seja estável e $x(t) \rightarrow 0$ para qualquer condição inicial.
- Assuma a seguinte lei de controle:

$$f(t) = -K_p x(t) - K_v \dot{x}(t)$$

- O diagrama de blocos do sistema em malha fechada está apresentado abaixo.



Controle de sistemas de segunda ordem

Controle de regulação de posição

- O sistema em malha fechada é dado por

$$m\ddot{x}(t) + \hat{b}\dot{x}(t) + \hat{k}x(t) = 0, \quad \hat{b} = b + K_v, \quad \hat{k} = k + K_p$$

- O sistema é estável sempre que m , \hat{b} e \hat{k} forem positivos.
- Para um amortecimento crítico em malha fechada é necessário que

$$\hat{b} = 2\sqrt{m\hat{k}}$$

- Assuma agora que a lei de controle seja

$$f(t) = \alpha f'(t) + \beta$$

onde α e β são coeficientes a serem escolhidos e $f'(t)$ é a nova entrada de controle.

- Em malha fechada, temos

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = \alpha f'(t) + \beta$$

- É possível escolher os coeficientes α e β de forma que o sistema se assemelhe com uma massa unitária sob a ação da força $f'(t)$.

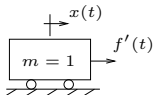
Controle de sistemas de segunda ordem

Controle de regulação de posição

- Seja $\alpha = m$ e $\beta = b\dot{x} + kx$, então a dinâmica passa a ser representada pela equação da massa unitária dada por

$$\ddot{x}(t) = f'(t)$$

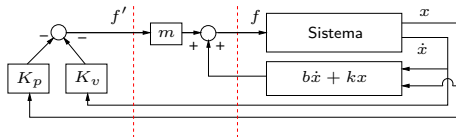
- Esta equação de movimento representa o sistema da figura abaixo.



- Escolhendo $f'(t) = -K_v\dot{x}(t) - K_p x(t)$, temos em malha fechada

$$\ddot{x}(t) + K_v\dot{x}(t) + K_p x(t) = 0$$

- O diagrama de blocos do sistema em malha fechada está apresentado abaixo.



- Para um amortecimento crítico em malha fechada é necessário que $K_v = 2\sqrt{K_p}$.
- Note que este critério agora independe dos parâmetros do sistema b e k .

Controle de sistemas de segunda ordem

Controle de rastreamento de trajetória

- Suponha que a trajetória desejada (conhecida) seja dada por

$$x_d(t), \quad \dot{x}_d(t), \quad \ddot{x}_d(t), \quad \forall t \in R$$

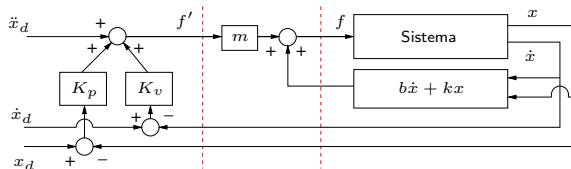
- Defina o erro de rastreamento por $e(t) = x_d(t) - x(t)$.
- Assuma a lei de controle $f'(t) = \ddot{x}_d(t) + K_v \dot{e}(t) + K_p e(t)$.
- Aplicando essa lei na equação da massa unitária, $\ddot{x} = f'(t)$, obtemos

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_d(t) + K_v \dot{e}(t) + K_p e(t)$$

- Assim, a equação do erro de rastreamento fica sendo

$$\ddot{e}(t) + K_v \dot{e}(t) + K_p e(t) = 0$$

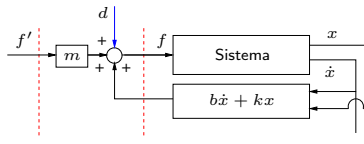
- Portanto, para K_v e K_p positivos, $e(t) \rightarrow 0$ e conseqüentemente $x(t) \rightarrow x_d(t)$.
- O diagrama de blocos para essa configuração está apresentado abaixo.



Controle de sistemas de segunda ordem

Rejeição ao distúrbio

- Suponha agora que exista um distúrbio no sistema (na entrada de controle f).



- Então, a equação do erro passa a ser

$$\ddot{e}(t) + K_v \dot{e}(t) + K_p e(t) = d(t)$$

- Se o sistema for BIBO estável, sabemos que para uma entrada limitada $d(t)$, tal que

$$\sup |d(t)| < \gamma < \infty,$$

o erro de rastreamento $e(t)$ também será limitado.

- Assumindo que o distúrbio é constante, $d(t) = d$, o erro estacionário e_∞ é dado por

$$K_p e_\infty = d \quad \Rightarrow \quad e_\infty = \frac{d}{K_p}$$

- Este erro pode ser suprimido com a adição de um integrador na lei de controle:

$$f'(t) = \ddot{x}_d(t) + K_v \dot{e}(t) + K_p e(t) + K_i \int e(\tau) d\tau$$

Controle de sistemas de segunda ordem

Rejeição ao distúrbio

- Em malha fechada, temos

$$\ddot{e}(t) + K_v \dot{e}(t) + K_p e(t) + K_i \int e(\tau) d\tau = d(t)$$

- Aplicando Laplace, temos

$$s^2 E(s) - s e_0 - \dot{e}_0 + K_v (s E(s) - e_0) + K_p E(s) + \frac{K_i}{s} E(s) = D(s)$$

- Definindo $\Omega(s) = s^3 + K_v s^2 + K_p s + K_i$, temos

$$\Omega(s) E(s) = s^2 e_0 + s \dot{e}_0 + K_v s e_0 + s D(s)$$

- Se a entrada for constante $d(t) = \bar{d}$, então $D(s) = \bar{d}/s$.

- Portanto, o erro de rastreamento passa a ser

$$E(s) = \frac{s(\dot{e}_0 + (K_v + s)e_0) + \bar{d}}{\Omega(s)}$$

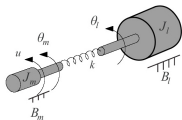
e conseqüentemente o erro estacionário e_∞ é nulo, já que

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = 0.$$

Considerações práticas

Incluindo as flexibilidades do sistema

- Está apresentado abaixo o modelo idealizado onde o atuador está conectado à carga através de uma mola torcional de rigidez k .



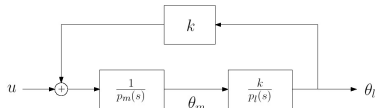
- A equação de movimento (em função do torque) é dada por

$$J_l \ddot{\theta}_l + B_l \dot{\theta}_l + k(\theta_l - \theta_m) = 0$$

$$J_m \ddot{\theta}_m + B_m \dot{\theta}_m + k(\theta_m - \theta_l) = u$$

onde J_l e J_m são as inércias da carga e do motor, B_l e B_m são os amortecimentos da carga e do motor, e u é o torque no eixo do motor.

- Aplicando Laplace temos o seguinte diagrama de blocos:



onde

$$p_l(s) = J_l s^2 + B_l s + k, \quad p_m(s) = J_m s^2 + B_m s + k$$

Incluindo a dinâmica do redutor

- O sistema em malha aberta é

$$\frac{\Theta_l(s)}{U(s)} = \frac{k}{p_l(s)p_m(s) - k^2}$$

com o polinômio característico $p_l(s)p_m(s) - k^2$ dado por

$$J_l J_m s^4 + (J_l B_m + J_m B_l) s^3 + (k(J_l + J_m) + B_l B_m) s^2 + k(B_l + B_m) s$$

- Negligenciando o amortecimento, temos

$$J_l J_m s^4 + k(J_l + J_m) s^2$$

cujos pólos são

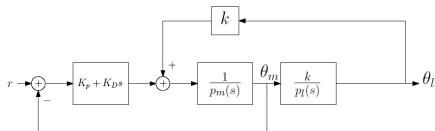
$$p_1 = p_2 = 0, \quad p_3, p_4 = \pm j\omega \quad \text{com} \quad \omega^2 = k \frac{J_m + J_l}{J_m J_l}$$

- Na prática, o amortecimento é baixo e a rigidez k é alta. Assim os pólos de malha aberta estão no SPE próximos do eixo imaginário.
- Esta análise mostra que, na prática, trata-se de um sistema difícil de ser controlado.

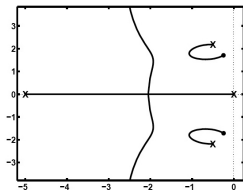
Considerações práticas

Realimentação da posição do motor

- Ao se projetar um controlador, a análise dependerá de quais medições de posição/velocidade serão utilizadas: do eixo do motor ou do eixo da carga.
- Incluindo um compensador PD, da forma $K_P + K_D s$, o sistema em malha fechada com realimentação da posição do motor tem a configuração apresentada abaixo.



- Para este sistema, o lugar das raízes em termos de K_D é dado por

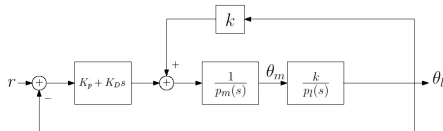


- Percebe-se que o sistema é estável para $K_D > 0$. No entanto, a presença de zeros de malha aberta próximos do eixo imaginário pode levar a oscilações indesejáveis.

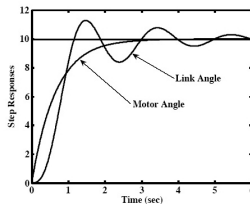
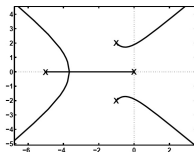
Considerações práticas

Realimentação da posição da carga

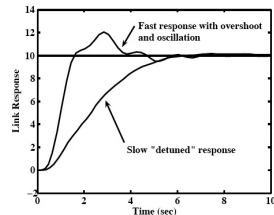
- O sistema de controle usando a posição θ_l da carga está apresentado na figura abaixo.



- As figuras abaixo apresentam o lugar das raízes em termos de K_D e a resposta de ambos os sistemas a uma entrada em degrau.



Feedback "motor".



Feedback "carga".

- Percebemos que, neste caso, o sistema torna-se instável para valores elevados de K_D . O valor limite pode ser determinado usando-se o critério de Routh-Hurwitz.

Considerações práticas

Efeitos da flexibilidade não modelada

- Vimos que ao levar em consideração a flexibilidade da junta/elo, o controlador PD já não fornece um desempenho tão satisfatório.
- O argumento utilizado para negligenciar essa flexibilidade foi baseado no fato de que se o sistema for suficientemente rígido, a frequência natural dessas ressonâncias não modeladas são altas e sua influência são desprezíveis comparadas com a influência dos pólos de segunda ordem dominantes.
- Caso a flexibilidade estrutural não seja modelada, deve-se ter cuidado para que essas ressonâncias não modeladas não sejam excitadas. Como regra prática, limita-se a frequência w_n do sistema em malha fechada, de forma a satisfazer

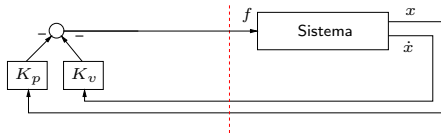
$$w_n \leq \frac{1}{2}w_{res}$$

- Para uma estimativa (não-rigorosa) da menor frequência de ressonância do sistema, pode-se utilizar um modelo discreto, onde uma viga de massa m é substituída por uma massa pontual de valor $0.23m$, na extremidade da viga. De forma similar, a inércia distribuída J pode ser substituída por uma inércia pontual de valor $0.33J$, na extremidade do eixo.
- Note que se for necessário uma maior largura de banda para o sistema em malha fechada, então será necessário incluir a flexibilidade estrutural no modelo.

Considerações práticas

Efeitos da flexibilidade não modelada

- Exemplo. Considere o sistema da figura cujos parâmetros são $m = 1$, $b = 1$ e $k = 1$. Sabemos ainda que a menor frequência não modelada é 8 rad/s.



- Determine α , β , K_p e K_v para a lei de controle de regulação de posição, de forma que o sistema seja criticamente amortecido, que a dinâmica não modelada não seja excitada e que a rigidez em malha fechada seja a mais alta possível.
- Solução:** Escolhemos $\alpha = 1$, $\beta = \dot{x} + x$. Assim, o sistema se assemelha a massa unitária sob efeito da entrada auxiliar $f'(t)$.
- Usando a regra prática

$$w_n \leq \frac{1}{2} w_{res}$$

escolhemos a frequência natural do sistema em malha fechada como $w_n = 4$ rad/s. O fator de amortecimento é escolhido como $\zeta = 1$. Assim o modelo desejado é

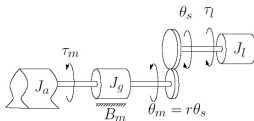
$$s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2 = s^2 + 8s + 16$$

- Da equação $\ddot{x} + K_v \dot{x} + K_p x = 0$, temos que $K_p = 16$ e $K_v = 8$.

Considerações práticas

Inércia efetiva

- Considere o modelo mecânico do motor conectado através do redutor à carga.



onde $\tau_l = \eta \tau_m$ e $\theta_l = \frac{1}{\eta} \theta_m$

- A dinâmica do sistema, com $J_m = J_a + J_g$, é dada por

$$J_m \ddot{\theta}_m(t) + B_m \dot{\theta}_m(t) = \tau_m - \tau_l / \eta$$

$$J_l \ddot{\theta}_l(t) + B_l \dot{\theta}_l(t) = \tau_l$$

- Fazendo o balanço dos torques, em termos de variáveis do motor, temos:

$$\tau_m = \left(J_m + \frac{J_l}{\eta^2} \right) \ddot{\theta}_m(t) + \left(B_m + \frac{B_l}{\eta^2} \right) \dot{\theta}_m(t)$$

ou ainda em termos de variáveis da carga:

$$\tau_l = \underbrace{\left(J_l + \eta^2 J_m \right)}_{\text{inércia efetiva}} \ddot{\theta}_l(t) + \underbrace{\left(B_l + \eta^2 B_m \right)}_{\text{amortecimento efetivo}} \dot{\theta}_l(t)$$

Considerações práticas

Inércia efetiva

- Em sistemas com alto fator de redução ($\eta \gg 1$), a inércia do motor passa a ser uma porção significativa da inércia total.
- Exemplo: suponha que a inércia do motor seja $J_m = 0.01$, que a relação de engrenagem seja $\eta = 30$ e que se saiba que a inércia aparente do elo varia entre 2 e 6 Kg.m^2 . Assim:
 - A inércia efetiva mínima é dada por $J_{\min} + \eta^2 J_m = 2 + (900)(0.01) = 11$;
 - A inércia efetiva máxima é dada por $J_{\max} + \eta^2 J_m = 6 + (900)(0.01) = 15$.
- É este efeito que permite considerar que a inércia do sistema é praticamente constante.
- Para assegurar que o sistema, no controle independente de juntas, nunca seja subamortecido, deve-se usar o valor máximo da inércia do elo.
- Simplificações admitidas para o controle independente de juntas:
 - A indutância L_a do motor pode ser negligenciada;
 - Considerando uma relação de engrenagem alta, a inércia efetiva é considerada constante e igual a $J_{\max} + \eta^2 J_m$;
 - A flexibilidade estrutural é negligenciada, exceto que a menor frequência estrutural w_{res} é usada no projeto dos ganhos do controlador.

Métodos no espaço de estado

Modelo no espaço de estado

- Vimos que o projeto PD é inadequado para o controle de robô, exceto:
 - se for negligenciada a flexibilidade da junta/elo;
 - se for permitido que o sistema tenha uma resposta lenta;
 - se for utilizada uma relação de transmissão alta.
- A equação de movimento do sistema foi determinada como sendo

$$\begin{aligned} J_l \ddot{\theta}_l + B_l \dot{\theta}_l + k(\theta_l - \theta_m) &= 0 \\ J_m \ddot{\theta}_m + B_m \dot{\theta}_m + k(\theta_m - \theta_l) &= u \end{aligned}$$

- Esta equação pode ser reescrita no espaço de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

- Escolhendo as seguintes variáveis de estado

$$x_1 = \theta_l, \quad x_2 = \dot{\theta}_l, \quad x_3 = \theta_m, \quad x_4 = \dot{\theta}_m$$

temos

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= -\frac{k}{J_l}x_1 - \frac{B_l}{J_l}x_2 + \frac{k}{J_l}x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4, & \dot{x}_4 &= \frac{k}{J_m}x_1 - \frac{B_l}{J_m}x_4 - \frac{k}{J_m}x_3 + \frac{1}{J_m}u \end{aligned} \right\} \rightarrow A \text{ e } B$$

- Escolhendo a saída como sendo $y(t) = \theta_l(t)$, temos: $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $D = [0]$.

Análise no espaço de estado

Controlabilidade e observabilidade

- Considere o sistema abaixo com condição inicial $x(t_0) = x_0$:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A \in R^{n \times n}, \quad B \in R^{n \times r}$$

- Controlabilidade completa de estado: O sistema é completamente controlável num instante $t = t_0$, se existir um tempo $t_f > t_0$ e uma lei de controle $u(t)$, com $t \in [t_0, t_f]$, tal que o estado é transferido de um estado inicial arbitrário $x(t_0) = x_0$ para um estado específico $x(t_f) = x_f$ num intervalo de tempo finito $t_f < \infty$.
- Esta condição é equivalente a verificar se o Gramiano de Controlabilidade X dado por

$$X = \int_0^\infty e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

é uma matriz positiva definida, ou seja, se $X > 0$.

- Uma condição necessária e suficiente para que $X > 0$, é que matriz de controlabilidade C tenha posto completo n :

$$C = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

- Pode-se mostrar que a matriz X satisfaz a seguinte equação de Lyapunov

$$AX + XA^T + BB^T = 0$$

Análise no espaço de estado

Controlabilidade e observabilidade

- Considere o sistema abaixo com condição inicial $x(t_0) = x_0$:

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx, \quad A \in R^{n \times n}, \quad C \in R^{p \times n}$$

- Observabilidade completa de estado: O sistema é observável num instante $t_f > t_0$, se o conhecimento de $y(t)$, com $t \in [t_0, t_f]$, fornece uma solução única $x(t_0)$ para

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0)$$

- Esta condição é equivalente a verificar se o Gramiano de Observabilidade

$$Q = \int_0^\infty e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$$

é uma matriz positiva definida, ou seja, se $Q > 0$.

- $Q > 0$ se, e somente se, a matriz de observabilidade \mathcal{O} tiver posto completo n :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

- Pode-se mostrar que a matriz Q satisfaz a seguinte equação de Lyapunov

$$QA + A^T Q + C^T C = 0$$

Projeto de controladores no espaço de estado

Fórmula de Ackermann

- Se o sistema for completamente controlável, podemos usar a fórmula de Ackermann para alocar os pólos.

- Suponha que o polinômio característico desejado em malha fechada seja

$$\phi(s) = |sI - A + BK| = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

- Então o ganho por realimentação completa de estado K é dada por

$$K = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \phi(A)$$

- Exemplo. Seja a planta $G(s) = 1/s^2$, cujas matrizes de estado são

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1], \quad D = 0$$

- Suponha que o polinômio desejado seja

$$\alpha_c = s^2 + 0.4s + 0.08 \quad \Rightarrow \quad \zeta = \sqrt{2}/2, \quad \omega_n = \sqrt{2}/5$$

- A equação a ser resolvida é

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [K_1 \quad K_2] \right| = s^2 + 0.4s + 0.08$$

cuja solução fornece $K_1 = 0.4$ e $K_2 = 0.08$.

Projeto de controladores no espaço de estado

Observador de Luenberger

- Nem todos os estados podem estar disponíveis, sendo necessário estimá-los.
- O estimador de ordem completa de Luenberger é dado por

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + Bu(t) + L(y - C\bar{x}) \\ &= (A - LC)\bar{x} + Bu + Ly\end{aligned}$$

onde \bar{x} é o estado estimado e $\bar{y} = C\bar{x}$ é a saída estimada.

- Para este estimador, a equação do erro $\tilde{x}(t) = \bar{x}(t) - x(t)$ é

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= A\bar{x} + Bu(t) + L(y - C\bar{x}) - Ax - Bu \\ &= (A - LC)\tilde{x}(t)\end{aligned}$$

- Assim, o erro a qualquer instante é dado por

$$\tilde{x}(t) = e^{(A-LC)t}\tilde{x}(0)$$

- Se o sistema for completamente observável, é possível escolher L de forma a alocar arbitrariamente os autovalores de $(A - LC)$.
- A equação característica é dada por

$$\det(sI - A + LC) = 0$$

Projeto de controladores no espaço de estado

Observador de Luenberger

- Exemplo. Considere o duplo integrador: $G(s) = \frac{1}{s^2}$

cujas matrizes no espaço de estado são

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1], \quad D = 0$$

- O sistema é observável, já que sua matriz de observabilidade é inversível:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Suponha que o polinômio desejado para o estimador seja

$$\alpha_o = s^2 + 2s + 2 \quad \Rightarrow \quad \zeta = \sqrt{2}/2, \quad \omega_n = \sqrt{2}$$

- A equação para alocar os pólos do observador é

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} [0 \quad 1] \right| = s^2 + 2s + 2 \quad \Rightarrow \quad l_1 = 2, l_2 = 2$$

- A equação do estimador é dada por

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = -2\bar{x}_2(t) + u(t) + 2y(t)$$

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = \bar{x}_1(t) - 2\bar{x}_2(t) + 2y(t)$$

Projeto de controladores no espaço de estado

Observador de Luenberger

- Se o sistema for completamente observável, existe uma matriz L tal que

$$\det(sI - A + LC) = \alpha_o(s)$$

- Fórmula de Ackermann:

$$L = \alpha_o(A) \mathcal{O}^{-1} [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]^T$$

onde \mathcal{O} é a matriz de observabilidade.

- O problema de alocação de pólos para o observador é dual do controlador.
- A equação característica é dada por

$$|sI - A + LC| = |sI - A^T + C^T L^T| = |sI - A^T + C^T K| \quad \text{com } K = L^T$$

- Esta equação característica representa o seguinte problema de controle

$$\dot{x} = A^T x + C^T u$$

$$u = -Kx$$

- Portanto, $\exists K$ que aloca arbitrariamente $\lambda_i(A^T + C^T K)$ sse o par (A^T, C^T) for controlável, i.e., se $[C^T \ A^T C^T \ (A^T)^{n-1} C^T]$ for de posto completo n .

Projeto de controladores no espaço de estado

Princípio da separação

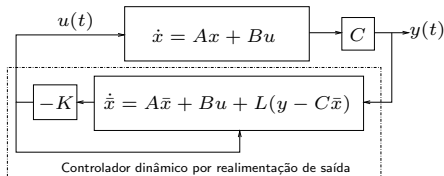
- No projeto do controlador por realimentação completa de estado, assume-se que todos os estados estão disponíveis, ou seja

$$u = -Kx(t)$$

- Caso x não esteja disponível, podemos usar o observador de Luenberger:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu + L(y - C\bar{x}) = (A - LC)\bar{x} + Bu + Ly$$

- Usando \bar{x} no lugar de x , a lei de controle passa a ser $u = -K\bar{x}$
- A estrutura final de controle fica sendo



- O princípio da separação afirma que o projeto do controlador e do estimador podem ser realizados de forma independentes, que a estabilidade permanecerá garantida.
- Os pólos do estimador são geralmente alocados de forma a serem de 3 a 6 vezes mais rápidos do que os pólos do controlador.

Projeto de controladores no espaço de estado

Princípio da separação

- É possível obter a função de transferência do controlador/observador.
- Para isto, usamos a equação do observador e do controlador dados por

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu(t) + L(y(t) - C\bar{x}(t)), \quad u = -K\bar{x}(t)$$

- Aplicando a transformada de Laplace, temos

$$D(s) = -K(sI - A + BK + LC)^{-1}L$$

- Note que a ordem do controlador $D(s)$ é a mesma do observador.
- Embora mais difícil, é possível obter um estimador de ordem reduzida.
- Exemplo. Para o sistema composto pelo duplo integrador, projetamos

$$K = [0.4 \quad 0.08], \quad L = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Assim, a função de transferência do controlador $D(s)$ é dada por

$$\begin{aligned} D(s) &= [0.4 \quad 0.08] \left(sI - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4 & 0.08 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{0.96(s + 1/6)}{s^2 + 2.4s + 2.88} \end{aligned}$$

Projeto de controladores ótimos no espaço de estado

Problema LQR horizonte infinito

- Considere o sistema linear contínuo invariante no tempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

- Desejamos encontrar uma lei de controle $u(t)$ de forma a minimizar o custo

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x(t)'Qx(t) + u(t)'Ru(t)) dt$$

onde $Q = Q' \geq 0$ e $R = R' > 0$ são matrizes de ponderação.

- A solução ótima é obtida da seguinte equação diferencial de Riccati:

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0$$

- A lei de controle ótima no caso é dada por

$$u^*(t) = -Kx(t), \quad \text{com} \quad K = R^{-1}B'P$$

- Exemplo. Considere o problema: $\min J = \int_0^T u(t)^2 dt$ sujeito a $\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$
Claramente, temos $u^* = 0$. No entanto o sistema em malha fechada será instável.
- Para garantir que $P > 0$ e que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável, é suficiente que haja controlabilidade e observabilidade.
- Controle por Matlab: $[K, P] = \text{lqr}(A, B, Q, R)$ e $[P] = \text{care}(A, B, Q, R)$.