

ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

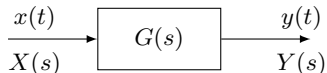
Nota ao leitor

- ▶ Estas notas são baseadas principalmente nas referências:
 - ▶ K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 4^a edição, Pearson Education do Brasil, 2003.
 - ▶ G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Ed., P.-Hall, 2010.
 - ▶ G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Digital Control of Dynamic Systems*, 2nd Ed., Add.-Wesley, 1994.
- ▶ Material suplementar:
 - ▶ K. Ogata, *Discrete-time control systems*, 2nd Edition, P.-Hall, 1995.
 - ▶ R. C. Dorf and R. H. Dorf, *Sistemas de controle Modernos*, 8^a edição, LTC Livros Técnicos e científicos, 2001.
 - ▶ J. R. Rowland, *Linear Control Systems: Modeling, analysing, and design*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
 - ▶ B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall, 1994.

Análise de resposta em frequência

Conceitos básicos

- ▶ Considere o sistema $Y(s) = G(s)X(s)$ da figura abaixo.



- ▶ Assuma uma entrada senoidal $x(t) = \sin \omega t$, ou seja, $X(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$.

- ▶ A saída do sistema é dada por

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

- ▶ Usando a decomposição em frações parciais (polos distintos), tem-se

$$Y(s) = \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + s_1} + \frac{b_2}{s + s_2} + \cdots + \frac{b_n}{s + s_n}$$

- ▶ Portanto

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1e^{-s_1t} + b_2e^{-s_2t} + \cdots + b_ne^{-s_nt}, \quad t \geq 0$$

- ▶ Assumindo polos estáveis ($\text{Re}[s_i] < 0$), a resposta em **regime permanente** é

$$y_{ss}(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t}$$

Análise de resposta em frequência

Conceitos básicos

- Os coeficientes a e \bar{a} podem ser determinados como segue

$$a = G(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{G(-j\omega)}{2j} \quad \text{e} \quad \bar{a} = \frac{G(j\omega)}{2j}$$

- Como $G(j\omega)$ é um número complexo, ele pode ser escrito como

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi}$$
$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)|e^{-j\phi} = |G(j\omega)|e^{-j\phi}, \quad \phi = \angle G(j\omega)$$

- A resposta em regime permanente fica sendo

$$y_{ss}(t) = \frac{-G(-j\omega)}{2j} e^{-j\omega t} + \frac{G(j\omega)}{2j} e^{j\omega t} = |G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j}$$
$$= |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi)$$

- Portanto, a **relação de amplitude e ângulo entre a saída senoidal e a entrada senoidal**, em regime permanente, é dada por

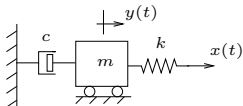
$$|G(j\omega)| = \frac{|Y(j\omega)|}{|X(j\omega)|} \quad \text{e} \quad \angle G(j\omega) = \angle \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

- A função $G(j\omega)$ é chamada **Função de Resposta em Frequência (FRF)**.

Análise de resposta em frequência

Conceitos básicos

- **Exemplo:** Seja o sistema abaixo



cuja função de transferência é

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Assuma que $\zeta = 0.2$ e $\omega_n = 1$ rad/s.

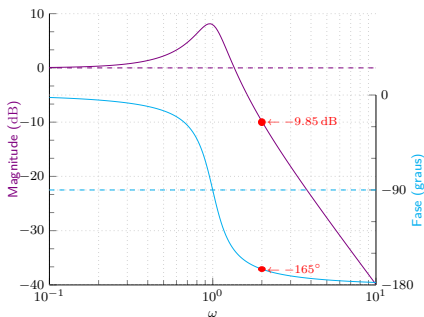
- De acordo com o gráfico, na frequência $\omega = 2$ rad/s, tem-se

$$|G(j\omega)|_{\omega=2} = -9.85 \text{ dB} = 0.32 \quad \text{e} \quad \angle G(j\omega)|_{\omega=2} = -165^\circ = -2.89 \text{ rad}$$

- Portanto, se for aplicada a entrada senoidal $x(t) = 5 \sin(2t)$, então a saída será:

$$y_{ss}(t) = 5 \times 0.32 \times \sin(2t - 2.89)$$

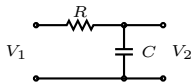
Gráfico de magnitude e fase de $G(j\omega)$



Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode

- **Exemplo:** Considere o circuito da figura abaixo.



- Sua função de transferência é dada por

$$G(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{\tau s + 1}, \quad \tau = RC$$

- Para $s = j\omega$, tem-se

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}, \quad \phi(j\omega) = \angle G(j\omega) = -\arctan \omega\tau$$

- Portanto

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \frac{1}{(1 + (\omega\tau)^2)^{1/2}} = -10 \log(1 + (\omega\tau)^2) \text{ dB}$$

- Para $\omega \ll 1/\tau$, $20 \log |G(j\omega)| \approx -10 \log 1 = 0 \text{ dB}$ ← **Assíntota**

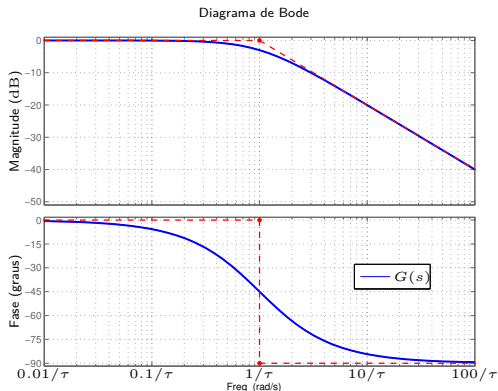
- Para $\omega \gg 1/\tau$, $20 \log |G(j\omega)| \approx -20 \log(\omega\tau) \text{ dB}$ ← **Assíntota**

- Para $\omega = 1/\tau$, $20 \log |G(j\omega)| = -10 \log 2 = -3.01 \text{ dB}$

Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode

- A figura abaixo apresenta diagrama de Bode de $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}$.



- A **frequência de canto** ω_τ (do inglês *corner/break frequency*) ocorre na interseção das duas assíntotas (na mudança de inclinação).
- Para o exemplo acima, a frequência de canto (ou de quebra) é $\omega_\tau = 1/\tau$ rad/s.
- **Observação:** No Matlab, esse gráfico é obtido com o comando **bode(G)**.

Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode

- ▶ **Exemplo:** Resposta em frequência de um capacitor.

$$i = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow I(s) = G(s)V(s) \quad \text{com} \quad G(s) = Cs$$

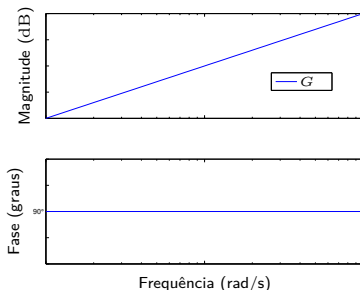
- ▶ A resposta em frequência é dada por

$$G(s) = Cs \Rightarrow G(j\omega) = Cj\omega$$

- ▶ Assim

$$|G(j\omega)| = C\omega \quad \text{e} \quad \phi = \angle G(j\omega) = 90^\circ$$

- ▶ O diagrama de Bode está apresentado abaixo.



Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode

► Uma função de transferência pode ser decomposta nos seguintes fatores básicos:

1. Ganho: $G(j\omega) = K$

2. Fatores integral e derivativo: $G(j\omega) = [j\omega]^{\mp 1}$

3. Fatores de primeira ordem: $G(j\omega) = [1 + j\omega\tau]^{\mp 1}$

4. Fatores quadrático: $G(j\omega) = \left[1 + 2\zeta \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^{\mp 1}$

► Analisando cada caso, tem-se:

1. Ganho $G(j\omega) = K$.

$$20 \log(K \times 10) = 20 \log K + 20$$

$$20 \log(K \times 10^n) = 20 \log K + 20n$$

$$20 \log K = -20 \log (1/K)$$

Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode

2. Fatores integral e derivativo.

2.1 Caso $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$.

$$20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega$$

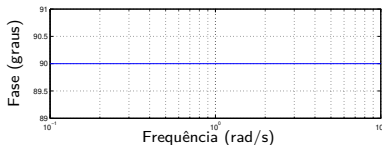
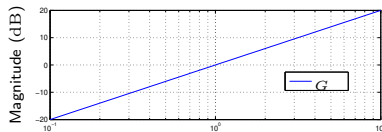
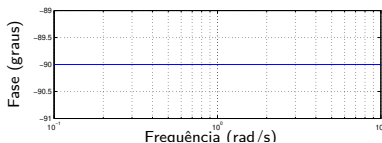
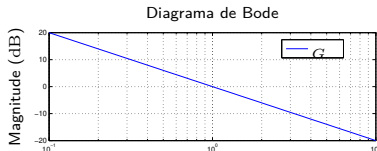
Como $G(j\omega) = -j \frac{1}{\omega}$, tem-se

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ$$

2.2 Caso $G(j\omega) = j\omega$.

$$20 \log |j\omega| = 20 \log \omega \text{ dB}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle j\omega = 90^\circ$$



Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode

3. Fatores de primeira ordem.

► Caso: $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2} - j \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}$.

► Calculando $20 \log |G(j\omega)|$, obtém-se

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau} \right| = -20 \log \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \text{ dB}$$

► Para $\omega \ll \frac{1}{\tau}$, tem-se

$$-20 \log \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \approx -20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

► Para $\omega \gg \frac{1}{\tau}$, tem-se

$$-20 \log \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \approx -20 \log \omega\tau \text{ dB}$$

► Portanto, pode-se aproximar o gráfico por duas retas assíntotas em $\frac{1}{\tau}$

► Ângulo de fase $\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}(-\omega\tau)$:

► em $\omega = 0 \Rightarrow \phi = 0$

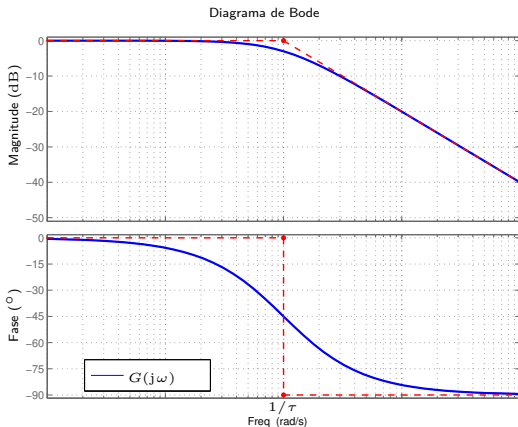
► em $\omega = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \phi = -\tan^{-1}(1) = -45^\circ$

► em $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \phi \rightarrow -90^\circ$

Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode

- Diagrama de Bode de $G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$



- **Exercício:** Esboce o diagrama de Bode para os seguintes sistemas: $\pm 1/(s \pm 1)$.

Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode

- **Exemplo:** Resposta em frequência de um compensador em avanço de fase:

$$K(s) = \hat{K} \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}, \quad \hat{K} > 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

- A resposta em frequência é dada por

$$K(j\omega) = \hat{K} \frac{Tj\omega + 1}{\alpha Tj\omega + 1}$$

- Portanto

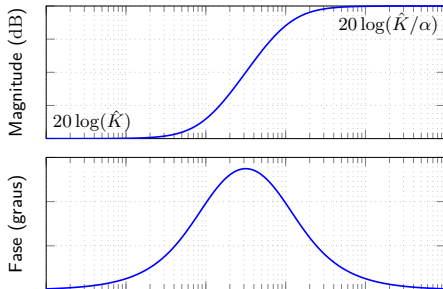
$$|K(j\omega)| = \hat{K} \frac{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}{\sqrt{1 + (\alpha \omega T)^2}}$$

e

$$\begin{aligned} \phi &= \angle(1 + j\omega T) - \angle(1 + j\omega \alpha T) \\ &= \tan^{-1}(\omega T) - \tan^{-1}(\alpha \omega T) \end{aligned}$$

- Isso representa um filtro passa-alta.

- **Exercício:** Esboce o diagrama de Bode para o compensador em atraso ($\alpha > 1$).



Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode

4. Fatores quadráticos.

► Caso: $G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2} = \frac{1}{1 + 2\zeta ju - u^2}, \quad u = \omega/\omega_n$

- Portanto, a magnitude é dada por

$$20 \log |G(j\omega)| = -10 \log \left((1 - u^2)^2 + 4\zeta^2 u^2 \right) \text{ dB}$$

e o ângulo de fase por

$$\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{-2\zeta u}{1 - u^2} \right)$$

- Note que para $u \ll 1$, ou seja $\omega \ll \omega_n$, tem-se $\phi \approx 0^\circ$ e

$$20 \log |G(j\omega)| \approx -10 \log 1 = 0 \text{ dB} \quad \leftarrow \text{Assíntota}$$

- Por outro lado, para $u \gg 1$, ou seja $\omega \gg \omega_n$, tem-se

$$\phi \approx \tan^{-1} \left(\frac{-2\zeta}{-u} \right) \approx -180^\circ$$

$$20 \log |G(j\omega)| \approx -10 \log u^4 = -40 \log u \text{ dB} \quad \leftarrow \text{Assíntota}$$

que fornece uma inclinação de -40 dB/dec .

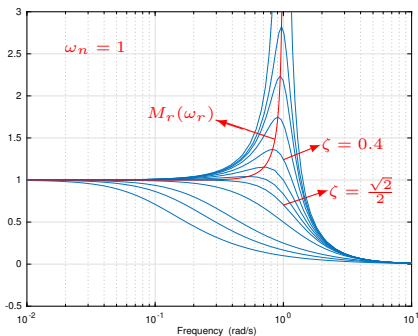
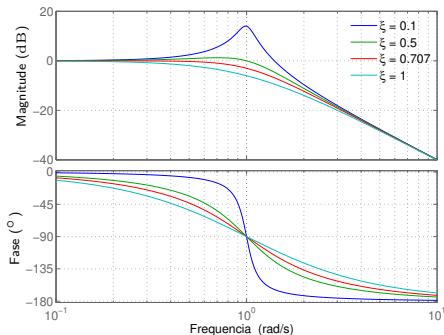
- Essas são as duas assíntotas que se encontram em $u = 1$, ou seja, $\omega = \omega_n$.

- Note que para $\omega = \omega_n$, tem-se $G(j\omega_n) = 1/(j2\zeta)$. Assim, $|G(j\omega_n)| = 1/(2\zeta)$.

Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode

- Diagrama de Bode de $G(j\omega) = (1 + 2\zeta j\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2)^{-1}$.



- **Observação:** O valor máximo M_r ocorre na frequência de ressonância ω_r , encontrada derivando-se $|G(j\omega)|^{-1}$ e igualando o resultado a zero:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \quad \text{para } \zeta \leq \sqrt{2}/2 \approx 0.707$$

$$M_r = |G(j\omega_r)| = 1/(2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}), \quad \zeta \leq 0.707$$

- Note que: $\omega_r \leq \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \leq \omega_n$

Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode

► **Exemplo 1:** Seja $G(s) = 2000 \frac{(s + 0.5)}{s(s + 10)(s + 50)}$

► Passos:

1. Coloque $G(j\omega)$ na forma abaixo:

$$G(j\omega) = \frac{2}{j\omega} \frac{\left(\frac{j\omega}{0.5} + 1\right)}{\left(\frac{j\omega}{10} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{50} + 1\right)}$$

2. As frequências de canto ocorrem em 0.5, 10 e 50 rad/s.

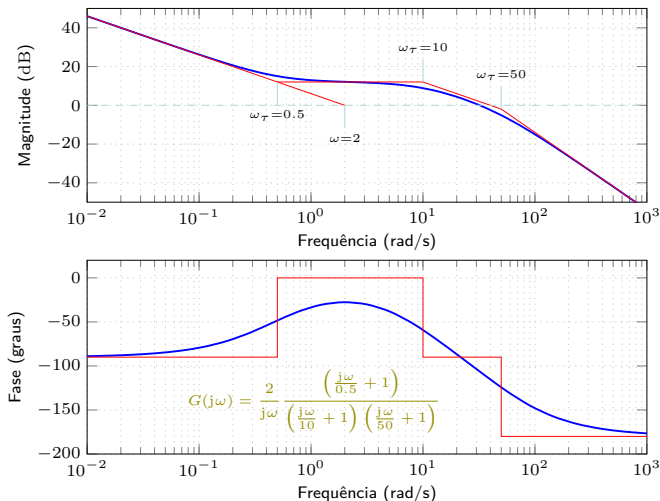
3. Para $\omega \ll 1$, o termo $G(j\omega)$ pode ser aproximado por $G(j\omega) \approx \frac{2}{j\omega}$

Note que a assíntota de inclinação -20 dB/dec é válida para $\omega \ll 0.5$, já que a primeira frequência de canto é em $\omega_\tau = 0.5$.

4. Faça o esboço do termo do numerador $\left(\frac{j\omega}{0.5} + 1\right)$
5. Faça o esboço do termo do denominador $\left(\frac{j\omega}{10} + 1\right)$
6. Faça o esboço do termo do denominador $\left(\frac{j\omega}{50} + 1\right)$

Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode



- **Exercício:** Esboce o diagrama de bode, com as respectivas assíntotas, do sistema de 2ª ordem $G(s) = \alpha^2 / (s(s + \beta))$. Prove que as assíntotas se encontram em $\omega = \beta$ e a interseção do segmento -40 dB/dec com o eixo 0 dB ocorre em $\omega = \alpha$.

Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode

► **Exemplo 2:** Seja $G(s) = \frac{0.01(s^2 + 0.01s + 1)}{s^2 \left(\frac{s^2}{4} + 0.02\frac{s}{2} + 1 \right)}$

► **Passos:**

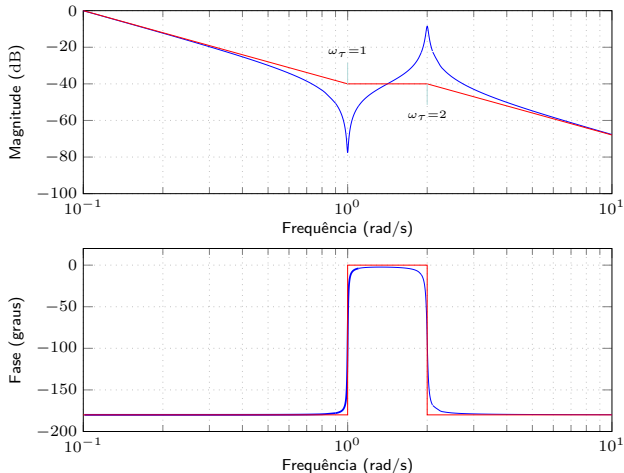
1. Perceba que o numerador $(j\omega)^2 + 0.01(j\omega) + 1$ pode ser reescrito como $(j\omega/\omega_n)^2 + 2\zeta j\omega/\omega_n + 1$ com $\zeta = 0.005$ e $\omega_n = 1$.
2. Já o denominador $\left(\frac{j\omega}{2}\right)^2 + 0.02\left(\frac{j\omega}{2}\right) + 1$ pode ser reescrito como $(j\omega/\omega_n)^2 + 2\zeta j\omega/\omega_n + 1$ com $\zeta = 0.01$ e $\omega_n = 2$.
3. As frequências de canto ocorrem portanto em 1 e 2 rad/s.
4. Para $\omega \ll 1$, o termo $G(j\omega)$ pode ser aproximado por $G(j\omega) \approx \frac{0.01}{(j\omega)^2}$

Note que a assíntota de inclinação -40 dB/dec é válida para $\omega \ll 1$, já que a primeira frequência de canto é em $\omega_\tau = 1$.

5. Faça o esboço do termo quadrático do numerador $\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1$ com $\omega_n = 1$ e $\zeta = 0.005$, cuja assíntota tem inclinação 40 dB/dec.
6. Faça o esboço do termo quadrático do denominador $\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1$ com $\omega_n = 2$ e $\zeta = 0.01$, cuja assíntota tem inclinação -40 dB/dec.

Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode



► Amplitudes (aproximadas) dos picos:

$$-40 - 20 \log \left(\frac{1}{2\zeta} \right)_{\zeta=0.005} = -80 \text{ dB} \quad \text{e} \quad -40 + 20 \log \left(\frac{1}{2\zeta} \right)_{\zeta=0.01} = -6 \text{ dB}$$

Análise de resposta em frequência

Sistema estável de fase mínima

- ▶ Um sistema é dito **estável de fase mínima** quando seus zeros também forem estáveis.
- ▶ Considere a seguinte planta estável de fase mínima:

$$G(s) = \frac{s + 1}{s + 10}$$

- ▶ Sua fase $\angle G(s)$ é dada por:

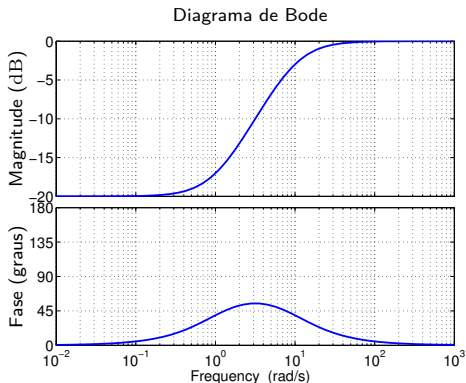
$$\angle G(s) = \angle(j\omega + 1) - \angle(j\omega + 10)$$

$$= \tan^{-1} \frac{\omega}{1} - \tan^{-1} \frac{\omega}{10}$$

$$\omega \rightarrow 0, 0 - 0 = 0$$

$$\omega \rightarrow \infty, 90^\circ - 90^\circ = 0$$

$$\omega = 1, 45^\circ - 6^\circ = 39^\circ$$



Análise de resposta em frequência

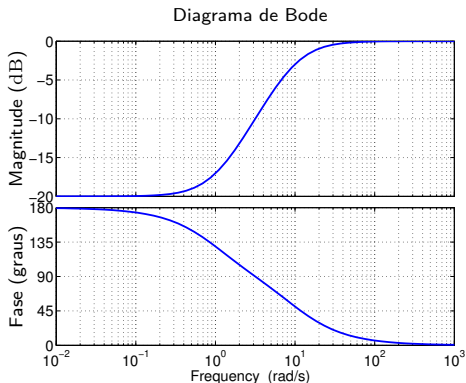
Sistema estável de fase não mínima

- ▶ Um sistema é dito **estável de fase não mínima** se algum zero for instável.
- ▶ Considere a seguinte planta estável de fase não mínima:

$$G(s) = \frac{s - 1}{s + 10}$$

- ▶ Sua fase $\angle G(s)$ é dada por:

$$\begin{aligned}\angle G(s) &= \angle(j\omega - 1) - \angle(j\omega + 10) \\ &= \tan^{-1} \frac{\omega}{-1} - \tan^{-1} \frac{\omega}{10} \\ \omega \rightarrow 0, 180^\circ - 0 &= 180^\circ \\ \omega \rightarrow \infty, 90^\circ - 90^\circ &= 0\end{aligned}$$



Análise de resposta em frequência

Frequência de ressonância e banda passante

- Considere o sistema padrão de segunda ordem:

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Sua função de resposta em frequência é $T(j\omega) = Me^{j\alpha}$ com

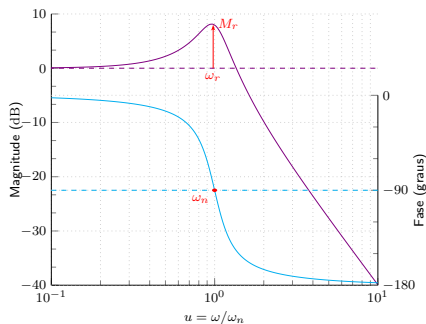
$$M = \left((1 - u^2)^2 + (2\zeta u)^2 \right)^{-1/2}, \quad \alpha = \arctan \left(\frac{-2\zeta u}{1 - u^2} \right), \quad u = \omega/\omega_n$$

- Na ressonância ($0 \leq \zeta \leq \sqrt{2}/2$), tem-se:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2},$$
$$M_r = 1/(2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2})$$

- Note que:

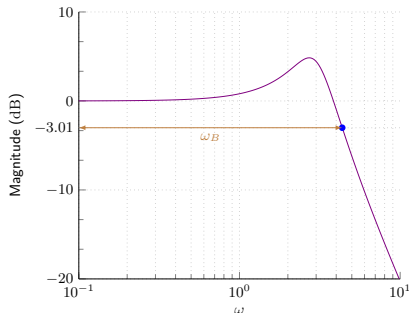
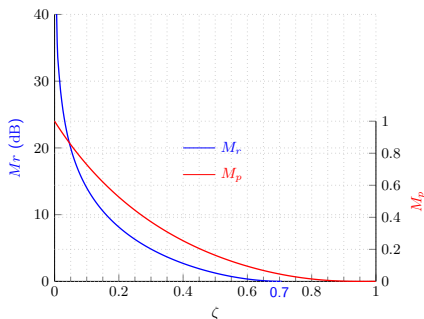
- $\zeta \rightarrow 0$ implica que $\omega_r \rightarrow \omega_n$;
- $\zeta = \sqrt{2}/2$ implica que $M_r = 1$;
- $\omega_r \leq \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \leq \omega_n$.



Análise de resposta em frequência

Frequência de ressonância e banda passante

- ▶ A figura a esquerda apresenta M_r e M_p para o sistema padrão de 2ª ordem.



- ▶ A figura a direita apresenta a banda passante ω_B (*bandwidth* ou *cutoff frequency*), que representa a faixa de frequência em que $|T(j\omega)| > -3.01$ dB.
- ▶ Para sistemas pouco amortecidos, é razoável do ponto de vista prático assumir:

$$\omega_B \approx \omega_r \approx \omega_n$$

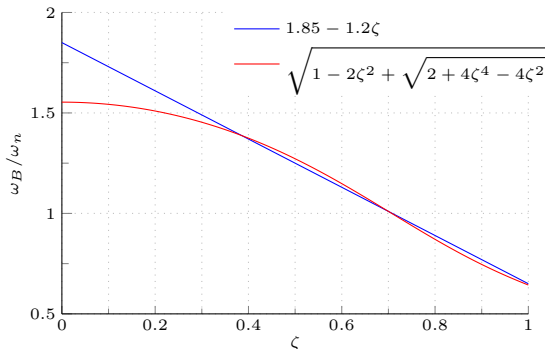
Análise de resposta em frequência

Frequência de ressonância e banda passante

- ▶ A banda passante (largura de banda) ω_B está relacionada com ω_n por

$$\frac{\omega_B}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\zeta^2} + \sqrt{2 + 4\zeta^4 - 4\zeta^2}$$

- ▶ A figura apresenta o gráfico de ω_B/ω_n e da aproximação $\omega_B/\omega_n \approx 1.85 - 1.2\zeta$

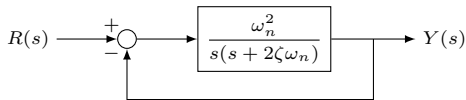


- ▶ Note que $\omega_B = \omega_n$ para $\zeta = \sqrt{2}/2$.

Análise de resposta em frequência

Resposta transitória

- ▶ Existe uma relação entre a resposta transitória ao degrau e a resposta em frequência.
- ▶ Considere a malha de controle abaixo.



- ▶ O sistema em malha fechada é dado por

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- ▶ Foi visto que a resposta ao degrau desse sistema é dada por

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right), \quad t \geq 0$$

em que $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$

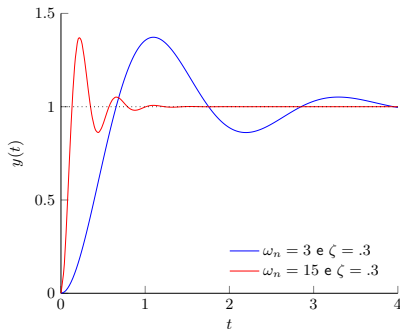
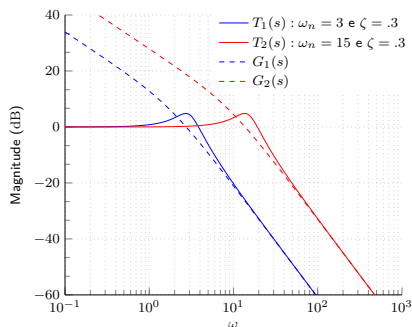
- ▶ Também foi visto que o sobressinal máximo é dado por $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$

Análise de resposta em frequência

Resposta transitória

- ▶ A figura a esquerda apresenta o diagrama de Bode em magnitude de

$$G(s) = \omega_n^2 / (s(s + 2\zeta\omega_n))$$



- ▶ A figura a direita apresenta a resposta ao degrau do respectivo sistema em malha fechada $T(s) = G(s)/(1 + G(s))$.
- ▶ Note que ω_r é um indicativo da velocidade transitória do sistema, já que o tempo de subida t_r é inversamente proporcional a $\omega_r \approx \omega_n$, para $\zeta \ll 1$.

Análise de resposta em frequência

Erro estacionário

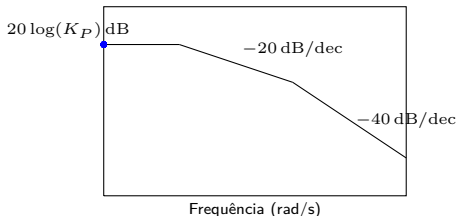
- Considere a planta abaixo

$$G(s) = \frac{K}{s^N} \frac{(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_p s + 1)}$$

- O sistema será do tipo 0 se $N = 0$.
- Para $N = 0$, o erro estático de posição e_{ss} é dado por:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_P}, \quad \text{com} \quad K_P = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = K$$

- Note que K_P é dado pelo ganho DC.



Análise de resposta em frequência

Erro estacionário

- Para $N = 1$ (sistema tipo 1), erro estático de velocidade e_{ss} é dado por:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \quad \text{com} \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = K$$

- Quando $\omega \ll 1/T_1$, tem-se

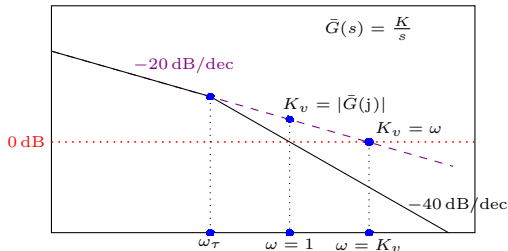
$$G(j\omega) \approx \bar{G}(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega} \Rightarrow |\bar{G}(j\omega)|_{\omega=1} \approx \left| \frac{K_v}{j} \right| \Rightarrow K_v = |\bar{G}(j)|$$

- Pode-se também mostrar que K_v é numericamente igual a interseção do segmento inicial de -20 dB/dec, ou sua extensão $\bar{G}(s)$, com o eixo 0 dB.

$$0 \text{ dB} = 20 \log 1$$

$$= 20 \log \left| \frac{K_v}{j\omega} \right|_{\omega=K_v}$$

$$= 20 \log |\bar{G}(j\omega)|_{\omega=K_v}$$



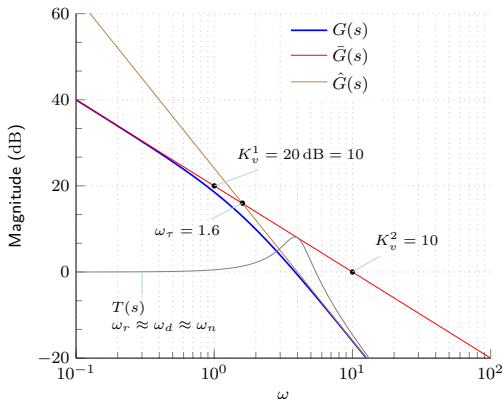
Análise de resposta em frequência

Erro estacionário

- **Exemplo:** Considere a planta $G(s)$ dada por

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}, \quad \text{com } \omega_n = 4 \text{ e } \zeta = 0.2$$

- Para essa planta, $K_v = \frac{\omega_n}{2\zeta} = 10$ e a frequência de canto é $\omega_\tau = 2\zeta\omega_n = 1.6$.
- Diagrama de Bode de G com as assíntotas \bar{G} (-20 dB/dec) e \hat{G} (-40 dB/dec).



$$\bar{G}(s) = \frac{K_v}{s}$$

$$\hat{G}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2}$$

$$K_v^1 = |\bar{G}(j\omega)|_{\omega=1}$$

$$K_v^2 = \left\{ \omega \mid |\bar{G}(j\omega)| = 1 \right\}$$

Análise de resposta em frequência

Erro estacionário

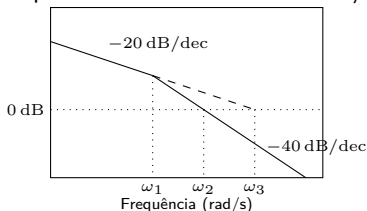
- ▶ **Exemplo:** A planta de um servomotor em malha aberta é dada por

$$G(s) = \frac{K}{s(Js + F)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + F/J)}, \quad \omega_n = \sqrt{K/J}$$

cujas função de transferência em malha fechada fica sendo

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + F/Js + \omega_n^2} \rightarrow \text{que fornece } \zeta = \frac{F}{2J\omega_n} = \frac{F}{2\sqrt{KJ}}$$

- ▶ Note que ζ pode ser determinado do diagrama de Bode como segue. Seja ω_1 a frequência de canto e ω_2 a interseção do segmento -40 dB/dec com o eixo 0 dB .



- ▶ Note que $\omega_1 = F/J$ e $\omega_2 = \omega_n$
 - ▶ Sabendo que $\omega_3 = K_v = K/F$ tem-se
$$\omega_3\omega_1 = \omega_2^2 \Rightarrow \omega_3/\omega_2 = \omega_2/\omega_1$$
 - ▶ No diagrama de Bode
$$\log \omega_3 - \log \omega_2 = \log \omega_2 - \log \omega_1$$
 - ▶ Portanto, ω_2 está no meio de ω_3 e ω_1
- ▶ Assim, o coeficiente de amortecimento é dado por $\zeta = \frac{F}{2\sqrt{KJ}} = \frac{\omega_1}{2\omega_2}$

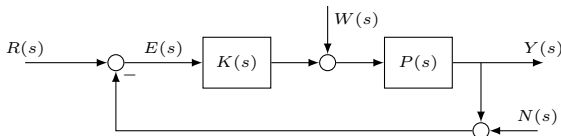
Análise de resposta em frequência

Exemplo

- **Exemplo:** Considere a planta $P(s)$ dada por

$$P(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 10)}$$

e a malha de controle apresentada abaixo.



- Especificações de desempenho:

1. Largura de banda do sistema de malha fechada menor que 1 Hz;
2. Sobressinal a uma entrada degrau menor que 15%;
3. Erro estacionário nulo a uma entrada em degrau.

- Tipo do controlador $K(s)$ proposto é dado por

$$K(s) = \frac{K(s^2 + as + b)}{s + c}$$

em que K , a , b e c são os parâmetros a serem projetados. Note que para $c = 0$, obtém-se um controlador PID com $K_P = aK$, $K_D = K$, $K_I = bK$.

Análise de resposta em frequência

Exemplo

- ▶ Como $P(s)$ já é do tipo 1, basta garantir que $K(s)P(s)$ continue do tipo 1, para que o erro estacionário a entrada degrau seja nulo.
- ▶ Para um sobressinal $M_p = 15\%$, a fórmula do máximo sobressinal

$$M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

fornece $\zeta = 0.52$.

- ▶ Para uma largura de banda $\omega_B = 6.28$ rad/s e um fator de amortecimento $\zeta = 0.52$, a aproximação linear

$$\frac{\omega_B}{\omega_n} \approx -1.2\zeta + 1.85, \quad \text{para } 0.3 \leq \zeta \leq 1$$

fornece $\omega_n = 5.11$ rad/s.

- ▶ Assim, é esperado que alocando-se um par de polos complexos dominantes em

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, \quad \text{com } \zeta = 0.52 \text{ e } \omega_n = 5.11$$

as especificações acima sejam satisfeitas.

Análise de resposta em frequência

Exemplo

- ▶ A função de transferência em malha aberta é dada por

$$K(s)P(s) = \frac{K(s^2 + as + b)}{s(s^2 + 2s + 10)(s + c)}$$

e em malha fechada por

$$T(s) = \frac{K(s)P(s)}{1 + K(s)P(s)} = \frac{K(s^2 + as + b)}{s^4 + (2 + c)s^3 + (10 + 2c + K)s^2 + (10c + Ka)s + Kb}$$

- ▶ A equação característica é dada por:

$$s^4 + (2 + c)s^3 + (10 + 2c + K)s^2 + (10c + Ka)s + Kb = 0$$

que é de 4ª ordem e pode ser escrita como o produto de duas de 2ª ordem.

- ▶ A equação característica desejada é dada por

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s^2 + d_1 s + d_0) = 0$$

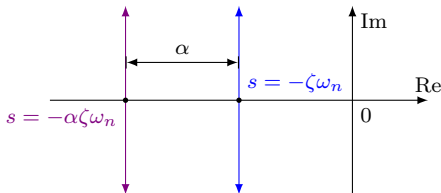
em que ζ e ω_n foram previamente selecionados.

- ▶ Para que as raízes de $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ sejam dominantes, as raízes de $s^2 + d_1 s + d_0$ devem ser posicionadas a uma distância α significativamente longe.

Análise de resposta em frequência

Exemplo

- Escolhendo $d_1 = 2\alpha\zeta\omega_n$, as raízes de $s^2 + d_1s + d_0 = 0$ estarão na linha vertical no plano complexo dada por $s = -\alpha\zeta\omega_n$, como ilustrado na figura abaixo.



- Note que se d_0 for escolhido como sendo $d_0 = \alpha^2\zeta^2\omega_n^2$, então

$$s^2 + d_1s + d_0 = (s + \alpha\zeta\omega_n)^2 = 0$$

e as duas raízes (idênticas) serão reais e amortecidas.

- O polinômio desejado fica sendo

$$s^4 + [2\zeta\omega_n(1 + \alpha)]s^3 + [\omega_n^2(1 + \alpha\zeta^2(\alpha + 4))]s^2 + \dots + [2\alpha\zeta\omega_n^3(1 + \zeta^2\alpha)]s + \alpha^2\zeta^2\omega_n^4 = 0$$

- Os parâmetros de projeto são dados por: $\zeta = 0.52$, $\omega_n = 5.11$ e $\alpha = 12$.

Análise de resposta em frequência

Exemplo

- ▶ Comparando coeficientes de ambos os polinômios de 4ª, obtém-se

$$\begin{aligned}2 + c &= 2\zeta\omega_n(1 + \alpha) \\10 + 2c + K &= \omega_n^2(1 + \alpha\zeta^2(4 + \alpha)) \\10c + Ka &= 2\alpha\zeta\omega_n^3(1 + \zeta^2\alpha) \\Kb &= \alpha^2\zeta^2\omega_n^4\end{aligned}$$

- ▶ Resolvendo esse sistema, obtém-se $a = 5.17$, $b = 21.45$, $c = 67.09$ e $K = 1238$.
- ▶ Portanto, o controlador obtido é dado por

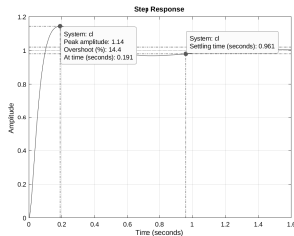
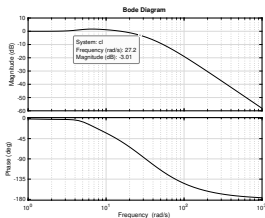
$$K(s) = 1238 \frac{s^2 + 5.17s + 21.45}{s + 67.09}$$

- ▶ O sistema em malha fechada fornece um sobressinal $M_p = 14.4\%$, um tempo de acomodação $t_s = 0.96$ segundos e uma banda passante $\omega_B = 27.2$ rad/s.
- ▶ Percebe-se que esse o controlador $K(s)$ forneceu um sobressinal adequado porém não atendeu a especificação sobre a banda passante.

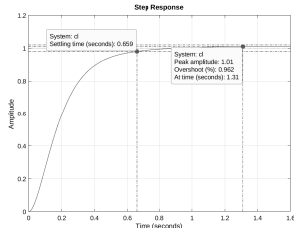
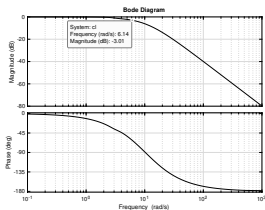
Análise de resposta em frequência

Exemplo

- ▶ A Figura abaixo apresenta o diagrama de Bode e a resposta ao degrau do sistema.



- ▶ Alterando os parâmetros para $\zeta = 0.3$, $\omega_n = 3.1$ e $\alpha = 11$, o controlador obtido $K(s) = 102(s^2 + 1.8s + 9.9)/(s + 20.3)$ atendeu às especificações desejadas.



Análise de resposta em frequência

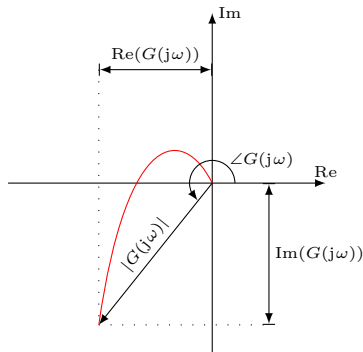
Diagrama de Nyquist

- ▶ O diagrama de Nyquist é uma representação paramétrica no plano complexo de $G(s)$ com $s = j\omega$, ou seja:

$$G(j\omega) = \text{Re}(G(j\omega)) + j \text{Im}(G(j\omega)) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega)$$

- ▶ O diagrama de Nyquist apresenta o gráfico de $\text{Re}(G(j\omega)) \times \text{Im}(G(j\omega))$ em função de $\omega \in \mathbb{R}$.

- ▶ Como ω pode assumir valores tanto positivos quanto negativos, o diagrama de Nyquist é simétrico com relação ao eixo real.



- ▶ A seguir serão apresentados exemplos de diagramas de Nyquist para sistemas padrões considerando ω **positivo**.
- ▶ **Observação:** No Matlab, o diagrama de Nyquist é obtido com o comando **nyquist(G)**.

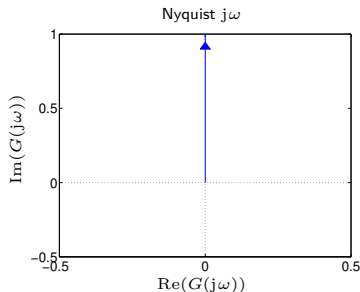
Análise de resposta em frequência

Diagrama de Nyquist

- Fator $G(s) = s$.

$$G(j\omega) = j\omega = \omega \angle 90^\circ$$

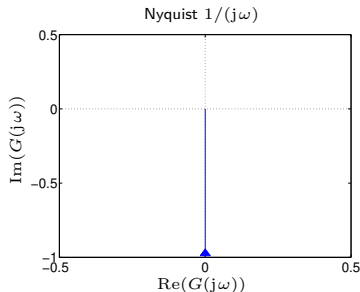
- Como $\text{Re}(G(j\omega)) = 0$, o diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ é o próprio eixo imaginário.



- Fator $G(s) = 1/s$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ$$

- Como $\text{Re}(G(j\omega)) = 0$, o diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ é o próprio eixo imaginário.



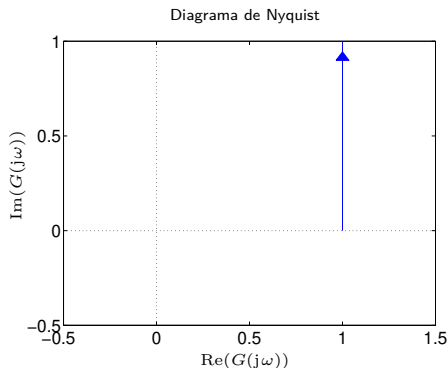
Análise de resposta em frequência

Diagrama de Nyquist

- Fator $G(s) = 1 + Ts$

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= 1 + j\omega T \\ &= \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \angle \tan^{-1}(\omega T) \end{aligned}$$

- Como $\text{Re}(G(j\omega)) = 1$, o diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ é uma reta vertical originada no eixo real em 1.



Análise de resposta em frequência

Diagrama de Nyquist

- Fator $G(s) = 1/(1 + Ts)$

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{1 + j\omega T} \\ &= \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \angle \tan^{-1} \left(\frac{-\omega T}{1} \right) \end{aligned}$$

- Para

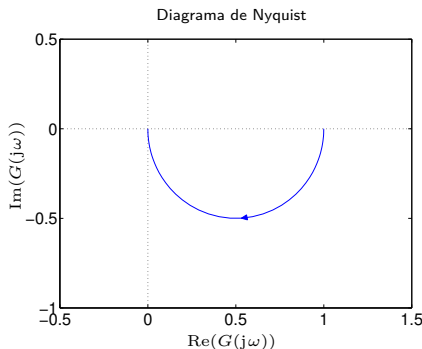
- $\omega = 0 \Rightarrow G(j0) = 1 \angle 0^\circ$

- $\omega = \frac{1}{T} \Rightarrow G(j \frac{1}{T}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ$

- $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(j\infty) \rightarrow 0 \angle -90^\circ$

- O diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ é uma circunferência de raio 0.5 centrada no ponto 0.5 do eixo real, já que:

$$[\operatorname{Re}(G(j\omega)) - 0.5]^2 + [\operatorname{Im}(G(j\omega))]^2 = 0.5^2$$



Análise de resposta em frequência

Diagrama de Nyquist

► Fator $G(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2} = \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1$

► Assim, para $s = j\omega$, tem-se

$$G(j\omega) = 1 - u^2 + j2\zeta u$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta u}{1 - u^2} \right)$$

com $u = \omega/\omega_n$

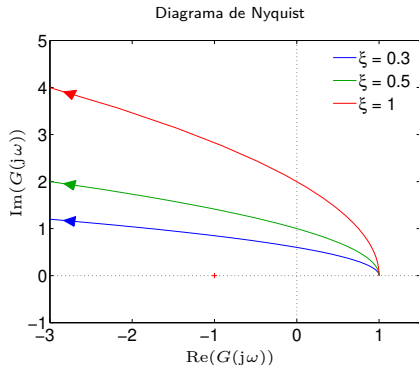
► Para

► $\omega = 0 \Rightarrow G(j\omega) = 1\angle 0^\circ$

► $\omega = \omega_n \Rightarrow G(j\omega) = 2\zeta\angle 90^\circ$

► $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(j\omega) \rightarrow \infty\angle 180^\circ$

► O diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ tem a forma de uma parábola negativa, com eixo de simetria paralelo ao eixo dos reais e vértice em $(\text{Im}, \text{Re}) = (0, 1)$.



Análise de resposta em frequência

Diagrama de Nyquist

► Fator $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{(s/\omega_n)^2 + 2\zeta s/\omega_n + 1}$

► Assim, para $s = j\omega$, tem-se

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - u^2 + j2\zeta u}$$

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{-2\zeta u}{1 - u^2} \right)$$

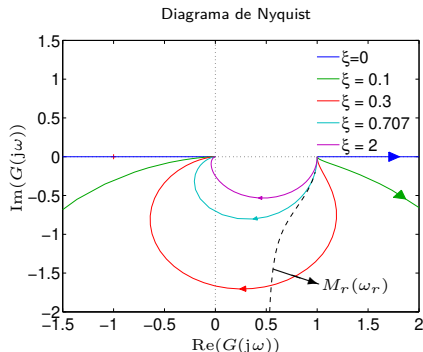
com $u = \omega/\omega_n$

► Para

► $\omega = 0 \Rightarrow G(j\omega) = 1 \angle 0^\circ$

► $\omega = \omega_n \Rightarrow G(j\omega_n) = \frac{1}{2\zeta} \angle -90^\circ$

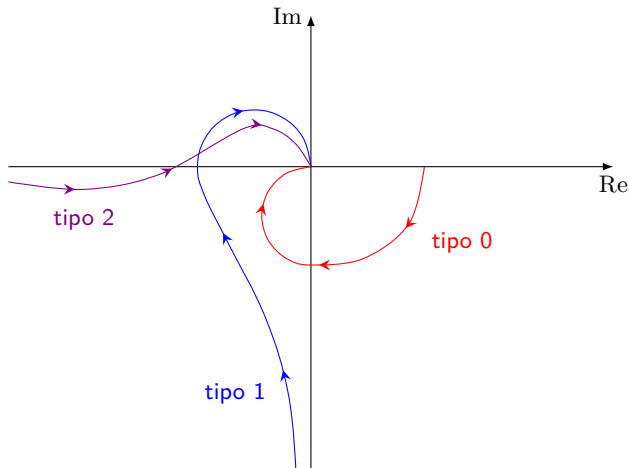
► $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G(j\omega) \rightarrow 0 \angle -180^\circ$



Análise de resposta em frequência

Diagrama de Nyquist

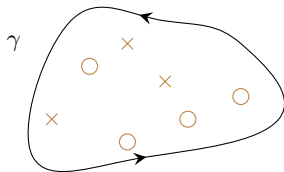
- ▶ É possível mostrar que para funções de transferência do tipo 0, 1 e 2, estritamente próprias, o diagrama de Nyquist tem a forma geral apresentada na figura abaixo.



Estabilidade de Nyquist

Princípio do argumento

- ▶ Seja $z \in \mathbb{C}$ e $f(z)$ uma função analítica num domínio D exceto nos polos de $f(z)$.
- ▶ Seja $\gamma \in D$ uma curva fechada e simples, orientada positivamente (**sentido anti-horário**), que **não passa através dos polos e zeros** de $f(z)$.



\times : polos; \mathcal{P} = número de polos no domínio

\bigcirc : zeros; \mathcal{Z} = número de zeros no domínio

- ▶ Pelo Teorema do Princípio do Argumento, tem-se

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{Z} - \mathcal{P}$$

- ▶ Pode-se também mostrar que

$$\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = j \left\{ \begin{array}{l} \text{mudança total em } \arg(f(z)) \\ \text{à medida que } z \text{ percorre } \gamma \end{array} \right\} = 2\pi j \mathcal{W}$$

em que \mathcal{W} é o número de envoltimentos **anti-horário** da origem.

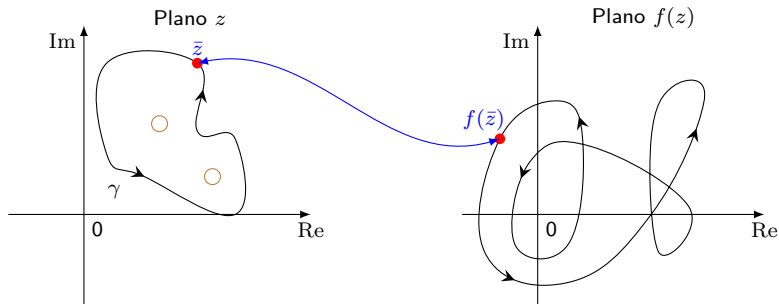
Estabilidade de Nyquist

Princípio do argumento

- Desta forma chega-se à relação:

$$\mathcal{W} = \mathcal{Z} - \mathcal{P}$$

- As figuras abaixo apresentam a região no plano z delimitada pela curva fechado γ , que contem dois zeros, e o respectivo mapeamento no plano $f(z)$ do contorno γ .

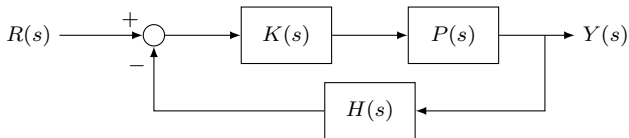


- Observe que no plano $f(z)$ houveram dois envoltimentos da origem no sentido anti-horário, o que é esperado, já que o contorno γ no plano z contem dois zeros.

Estabilidade de Nyquist

Análise de estabilidade

- Considere o diagrama abaixo.



- A equação característica do sistema em malha fechada é

$$1 + L(s) = 0 \quad \text{com} \quad L(s) = K(s)P(s)H(s)$$

ou

$$F(s) = 0 \quad \text{com} \quad F(s) = 1 + L(s)$$

- Note que os polos de $F(s) = 1 + L(s)$ são os mesmos de $L(s)$.

- Para ver esse fato, substitua $L(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ na expressão acima:

$$F(s) = 1 + \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{d(s) + n(s)}{d(s)}$$

Estabilidade de Nyquist

Análise de estabilidade

- ▶ Para que o sistema seja estável é preciso que os polos em malha fechada estejam no semi-plano esquerdo do plano complexo (SPE).
- ▶ Note que os polos da função de transferência em malha fechada são as raízes (os zeros) de $F(s) = 1 + L(s)$. Assim $F(s)$ não pode ter zeros no SPD ($\mathcal{Z} = 0$).
- ▶ Assuma que $L(s)$ não contém polos ou zeros no eixo imaginário e que o contorno γ envolve (no sentido horário) o semi-plano direito do plano complexo (SPD).
- ▶ Pode-se agora aplicar o Princípio do Argumento:

$$\mathcal{W} = \mathcal{Z} - \mathcal{P} \xrightarrow{\mathcal{Z}=0} \mathcal{W} = -\mathcal{P}$$

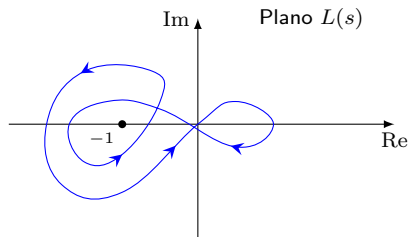
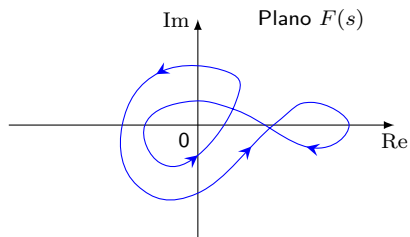
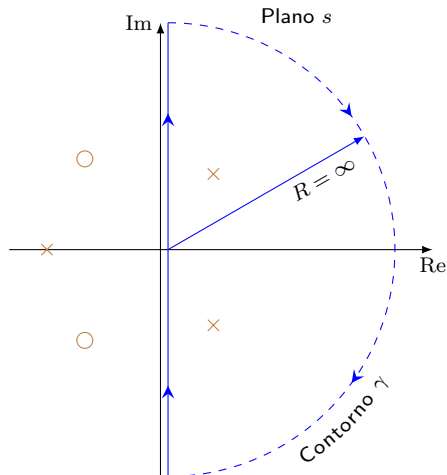
notando que os polos de $F(s)$ são conhecidos, já que são os mesmos de $L(s)$.

- ▶ Assim, conclui-se que o sistema em malha fechada será estável se o número \mathcal{W} de envolvimento do ponto -1 (no sentido anti-horário) no diagrama de Nyquist da função $L(s)$ for o mesmo que o número \mathcal{P} de polos de $L(s)$ localizados no SPD.

Estabilidade de Nyquist

Análise de estabilidade

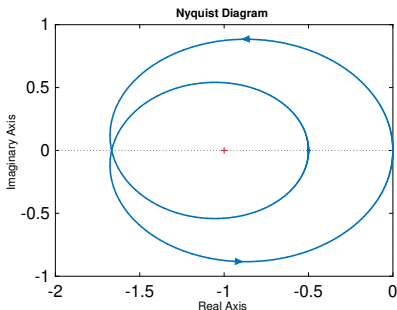
- A figura abaixo apresenta um sistema estável, já que ocorreram 2 envoltimentos da origem no plano $F(s)$ (respectivamente, 2 voltas do ponto -1 no plano $L(s)$).



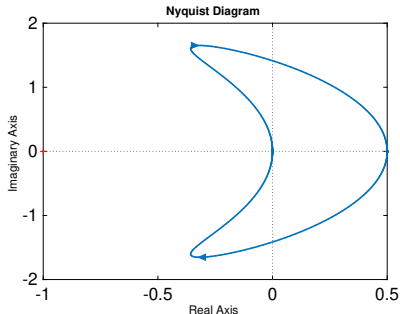
Estabilidade de Nyquist

Análise de estabilidade

- ▶ O diagrama (a) da esquerda apresenta 2 envoltimentos anti-horários do ponto -1 (assim $\mathcal{W} = -2$). Como $L(s)$ tem 2 polos no SPD, fornecendo $\mathcal{P} = 2$, conclui-se da relação $\mathcal{W} = \mathcal{Z} - \mathcal{P}$ que $\mathcal{Z} = 0$ e o sistema é portanto **estável**.



(a)
$$L(s) = \frac{5(s - 0.2)}{(s - 2)(s - 1)}$$



(b)
$$L(s) = \frac{5(s - 0.2)}{(s - 2)(s + 1)}$$

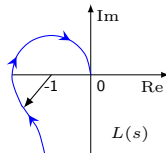
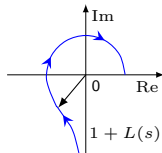
- ▶ Já no diagrama (b) da direita, não ocorre envolvimento do ponto -1 (assim $\mathcal{W} = 0$). Como $L(s)$ tem 1 polo no SPD, ou seja $\mathcal{P} = 1$, conclui-se que $\mathcal{Z} = 1$ e o sistema em malha fechada tem 1 polo no SPD, sendo portanto **instável**.

Estabilidade de Nyquist

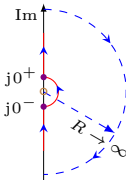
Observações

1. Se $F(s)$ for própria (maioria dos sistemas) então $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s)$ é finito e permanece constante à medida que γ percorre uma semi-circunferência de raio infinito.
2. Assim, é preciso calcular $F(s)$ apenas no eixo imaginário, de $-j\omega$ a $+j\omega$ com $\omega \in [0, +\infty]$, contando que não existam zeros ou polos no eixo imaginário.

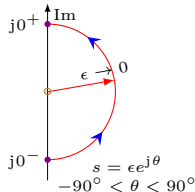
3. Note que um envolvimento da origem por $F(s) = 1 + L(s)$ é equivalente a um envolvimento do ponto -1 por $L(s)$.



4. No caso em que $L(s)$ possui polos ou zeros em $s = j\omega$, modifica-se a curva envolta dos respectivos polos e zeros.



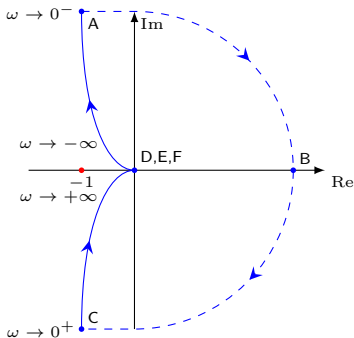
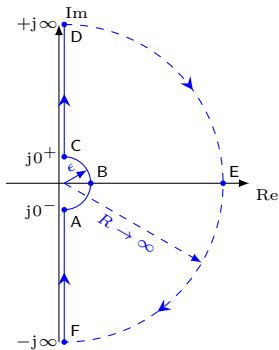
5. Pode-se optar por incluir ou **não incluir** (como na figura ao lado) o polo/zero dentro do contorno.



Estabilidade de Nyquist

Exemplos de polos na origem

1. Suponha que a função $L(s)$ seja dada por $L(s) = 1/(s(s+1))$.
2. Para $s = \epsilon e^{j\theta}$ com $\epsilon \rightarrow 0$ e $-90^\circ < \theta < 90^\circ$, tem-se: $L(\epsilon e^{j\theta}) \approx \frac{1}{\epsilon e^{j\theta}} = \frac{1}{\epsilon} e^{-j\theta}$
3. Portanto $1/\epsilon \rightarrow \infty$ com $\angle L(s)$ variando de 90° a -90° .
4. Dessa forma os pontos $L(j0^-) \rightarrow j\infty$ e $L(j0^+) \rightarrow -j\infty$ estão ligados por um uma semi-circunferência (à direita) de raio infinito no plano $L(s)$.

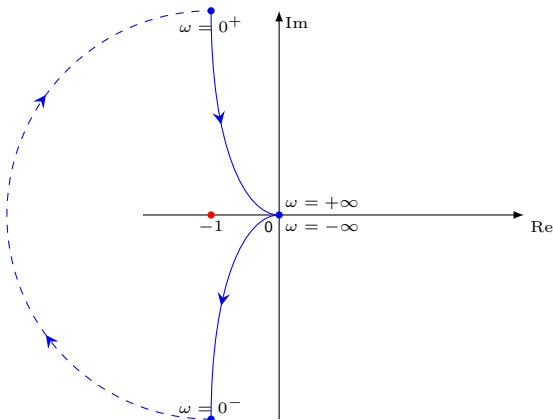


5. Como $\mathcal{P} = 0$ e $\mathcal{W} = 0$, então $\mathcal{Z} = 0$ e o sistema é estável.

Estabilidade de Nyquist

Exemplos de polos na origem

1. Suponha que a função $L(s)$ seja dada por $L(s) = 1/(s(s-1))$.
2. A figura abaixo apresenta o diagrama de Nyquist de $L(s)$.

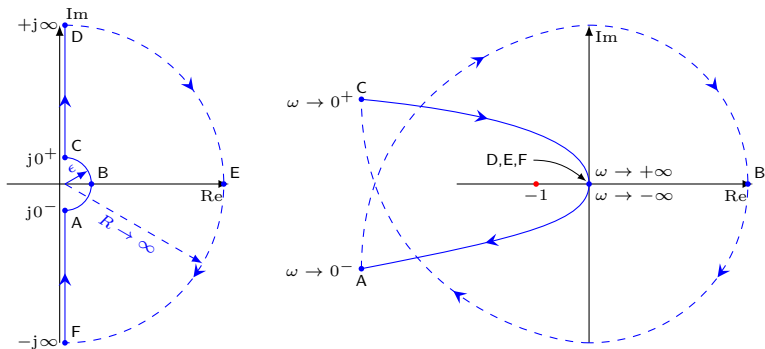


3. Como $\mathcal{P} = 1$ e $\mathcal{W} = 1$, então $\mathcal{Z} = 2$ e o sistema em malha fechada terá 2 polos no SPD e será portanto instável. Os polos em malha fechada são $s = \frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Estabilidade de Nyquist

Exemplos de polos na origem

1. Suponha que a função $L(s)$ seja dada por $L(s) = 1/(s^2(s+1))$.
2. Para $s = \epsilon e^{j\theta}$ com $\epsilon \rightarrow 0$ e $-90^\circ < \theta < 90^\circ$, tem-se: $L(\epsilon e^{j\theta}) \approx \frac{1}{\epsilon^2 e^{2j\theta}} = \frac{1}{\epsilon^2} e^{-2j\theta}$
3. Conforme θ varia de -90° a 90° no plano s , o ângulo $\angle L(s)$ varia de 180° a -180° .

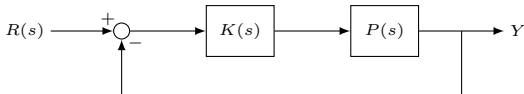


4. **Exercício:** Mostre o mapeamento: C em $(-\infty, +\infty)$ com $+180^\circ$; A em $(-\infty, -\infty)$ com -180° ; D em $(0, 0)$ com $+90^\circ$ e F em $(0, 0)$ com -90° .
5. Como $\mathcal{P} = 0$ e $\mathcal{W} = 2$, então $\mathcal{Z} = 2$ e o sistema em malha fechada possui 2 polos no SPD. Portanto, o sistema é instável.

Margem de ganho e de fase

Conceitos básicos

- ▶ A Margem de Ganho (MG) e a Margem de Fase (MF) de uma planta $P(s)$ são **indicadores relativos de estabilidade**.
- ▶ Considere a malha de controle abaixo:



- ▶ A MG informa qual o valor máximo que um **ganho estático** $K(s) = K$ pode assumir sem que ocorra alteração no número de envoltimentos do ponto -1 .
- ▶ A MF informa qual o valor máximo que um **atraso de fase** pode ser adicionado, por uma função de transferência $K(s)$ de **ganho unitário**, sem que ocorra alteração no número de envoltimentos do ponto -1 no diagrama de Nyquist.
- ▶ Tanto a MG como a MF podem ser determinados através dos diagramas de Bode e de Nyquist. No root locus, a MG indicará a interseção com o eixo imaginário.
- ▶ Note que se o sistema já for estável em malha fechada (com $K(s) = 1$), então:
 - ▶ o sistema permanecerá estável se $K(s) = K$ for um ganho limitado a $K \in (0, MG)$;
 - ▶ ou se $K(s)$ for uma função de ganho unitário com atraso de fase limitado a MF.

Margem de ganho e de fase

Conceitos básicos

- ▶ Considere o root locus da planta:

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

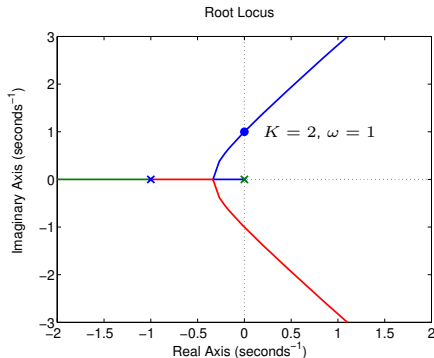
- ▶ A equação característica é dada por:

$$1 + KP(s) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |KP(s)| = 1 \\ \angle P(s) = -180^\circ \end{cases}$$

- ▶ O ponto de interseção do root locus com o eixo imaginário pode ser determinado diretamente da equação característica, fazendo-se $s = j\omega$.
- ▶ Para a planta $P(s)$ acima, K e ω no eixo imaginário são dados por

$$1 + \frac{K}{j\omega(j\omega+1)^2} = 0 \iff (K - 2\omega^2) - j\omega(\omega^2 - 1) = 0 \Rightarrow K = 2, \omega = 1$$

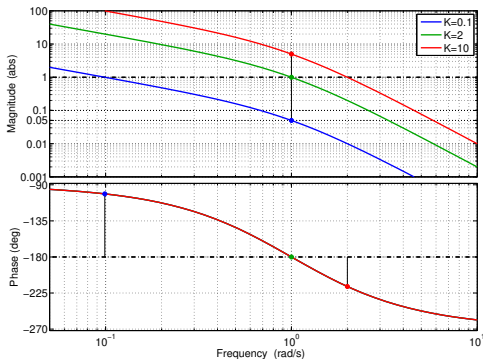
- ▶ Assim, **MG = 2** e o sistema será estável para $0 < K < 2$ e instável para $K > 2$.



Margem de ganho e de fase

MG e MF no diagrama de Bode

Diagrama de Bode de $K/(s(s+1)^2)$

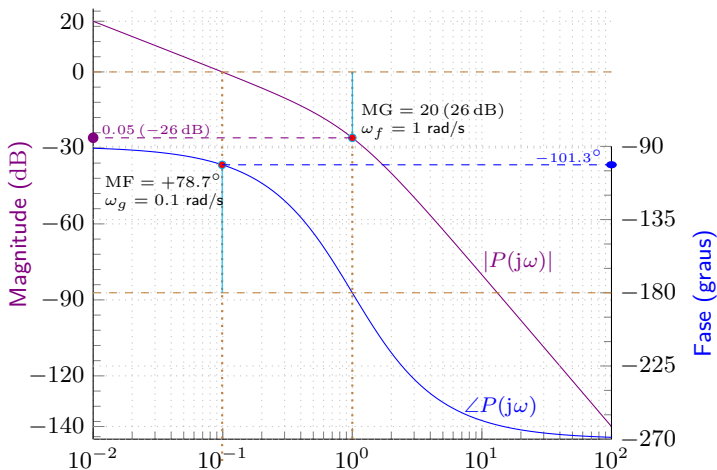


- ▶ Para $K = 0.1$, o sistema é **estável**, já que:
 - ▶ $1/\text{MG} = 0.05$ e assim $\text{MG} = 20$ (26 dB) na frequência de **cruzamento de fase** $\omega_f = 1$.
 - ▶ $\text{MF} = 78.7^\circ$ na frequência de **cruzamento de ganho** $\omega_g = 0.1$ rad/s.
- ▶ Para $K = 2$, $\text{MG} = 1$ (0 dB) e $\text{MF} = 0$, com $\omega_f = \omega_g = 1$ rad/s.
- ▶ Para $K = 10$, $1/\text{MG} = 5$ e assim $\text{MG} = 0.2$ (-14 dB) na frequência $\omega_f = 1$ rad/s. $\text{MF} = -36.9^\circ$ na frequência $\omega_g = 2$ rad/s. Portanto, o sistema é **instável**.

Margem de ganho e de fase

MG e MF no diagrama de Bode

- A figura abaixo apresenta o diagrama de Bode de $P(s) = \frac{0.1}{s(s+1)^2}$.



- **Observação:** Os comandos **margin(H)** e **allmargin(H)** fornecem as margens de ganho e de fase, e as respectivas frequências de corte.

Margem de ganho e de fase

MG e MF no diagrama de Bode

- ▶ A margem de ganho MG é dada por $MG = 1/|P(j\omega_f)|$

em que a **frequência de cruzamento de fase** ω_f satisfaz:

$$\angle P(j\omega_f) = -180^\circ(2n + 1), \quad n \in \mathbb{Z}$$

- ▶ A margem de fase está sempre no intervalo $MF \in [-180^\circ, +180^\circ]$ e é dada por:

$$\begin{cases} MF = +180^\circ + \angle P(j\omega_g) & , \text{ se } \angle P(j\omega_g) < 0 \\ MF = -180^\circ + \angle P(j\omega_g) & , \text{ se } \angle P(j\omega_g) > 0 \end{cases}$$

em que a **frequência de cruzamento de ganho** ω_g satisfaz $|P(j\omega_g)| = 0 \text{ dB}$.

- ▶ Para o cálculo de MF usando a fórmula acima, a **fase de** $P(s)$ deve variar entre:

$$\angle P(j\omega_g) \in [-360^\circ, +360^\circ]$$

- ▶ Se a **fase estiver fora desse intervalo será necessário adicionar** múltiplos de $\pm 360^\circ$:

$$\begin{cases} MF = +180^\circ(2n + 1) + \angle P(j\omega_g) & , \text{ se } \angle P(j\omega_g) < 0 \\ MF = -180^\circ(2n + 1) + \angle P(j\omega_g) & , \text{ se } \angle P(j\omega_g) > 0 \end{cases}$$

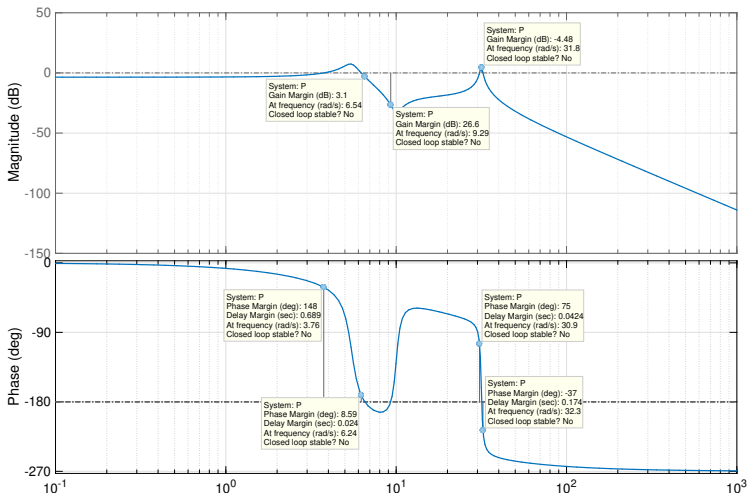
- ▶ Note que uma **planta** $P(s)$ **pode ter vários MG e MF**, dependendo do número de cruzamentos dos pontos -180° e 0 dB , respectivamente. Assim, **poderão haver múltiplos** ω_f e ω_g , relacionados aos respectivos MG e MF.

Margem de ganho e de fase

MG e MF no diagrama de Bode

► A figura abaixo apresenta o diagrama de Bode da planta $P(s)$ dada por:

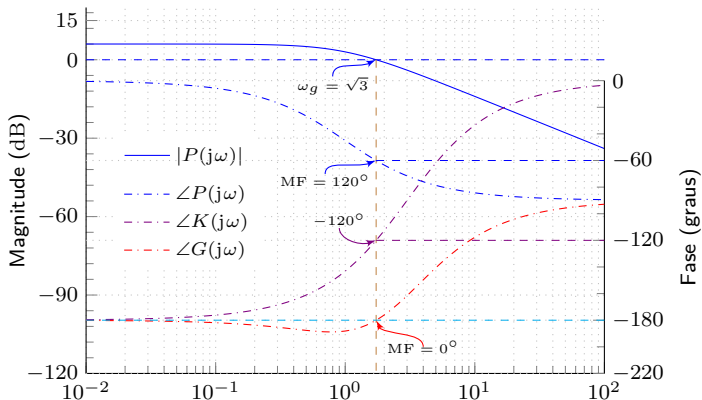
$$P(s) = 2000 \frac{s^2 + s + 100}{(s + 10)(s^2 + s + 30)(s^2 + s + 1000)}$$



Margem de ganho e de fase

MG e MF no diagrama de Bode

- ▶ O diagrama de Bode de $P(s) = 2/(s + 1)$ apresentado abaixo fornece MF = 120° em $\omega_g = \sqrt{3}$. Esse sistema é estável em malha fechada com ganho unitário.
- ▶ Portanto, $K(s)$ pode fornecer um atraso de fase de até $\angle K(j\omega_g) = -120^\circ$.
- ▶ Escolhendo $K(s) = (s + 3)/(s - 3)$, que fornece $K(j\omega_g) = -120^\circ$, em $\omega_g = \sqrt{3}$, com $|K(j\omega)| = 1, \forall \omega$, então $G(s) = K(s)P(s)$ terá MF = 0° .



Margem de ganho e de fase

MG e MF no diagrama de Bode

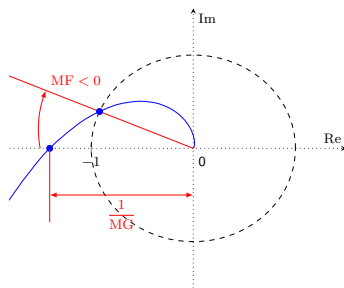
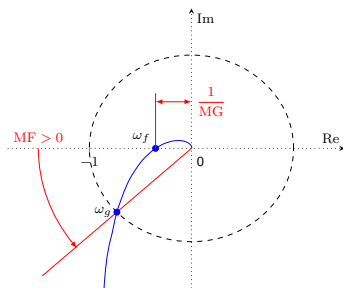
- ▶ É possível que o sistema tenha $MG = \infty$ ou $MF = \infty$, como apresentado abaixo:
 - ▶ $P(s) = 2/(s+1)$, com $MG = \infty$ e $MF = 120^\circ$.
 - ▶ $P(s) = 0.2/(s+1)$, com $MG = \infty$ e $MF = \infty$.
 - ▶ $P(s) = 0.2/(s+1)^3$, com $MG = 32 \text{ dB}$ e $MF = \infty$.
- ▶ É preciso ter cautela ao analisar a estabilidade usando MG e MF. O mais aconselhável é utilizar sempre o diagrama de Nyquist:
 - ▶ $P(s) = 2(s+1)/(s(s-1))$ é estável com $MG = -6 \text{ dB}$ e $MF = 37^\circ$.
 - ▶ $P(s) = 2(s-0.5)/(s+2)$ é estável com $MG = 6 \text{ dB}$ e $MF = -90^\circ$.
 - ▶ $P(s) = 5(s+10)^2/(s+1)^3$ é estável com $MG = \{-26, -10\} \text{ dB}$ e $MF = 16.8^\circ$.
 - ▶ $P(s) = 10(s-1)/(s+1)^4$ é instável com $MG = \{-20, 10\} \text{ dB}$ e $MF = 48^\circ$.
 - ▶ $P(s) = -(s-3)^2/(s(2s+1))$ é instável com $MG = 6 \text{ dB}$ e $MF = 100^\circ$.
- ▶ Porém, para uma planta $P(s)$, **estável, de fase mínima, com $P(0) > 0$** , o sistema em malha fechada (com $K(s) = 1$) será estável sempre que:

todas as margens de ganho MG e de fase MF forem positivas.
- ▶ Notação: a frequência de cruzamento (ganho ou fase) também é chamada de frequência de corte (ou *crossover frequency*).

Margem de ganho e de fase

MG e MF no diagrama de Nyquist

- ▶ A MG e a MF podem ser determinadas a partir do diagrama de Nyquist.
- ▶ Foi visto que a margem de ganho MG é dada por $MG = 1/|P(j\omega_f)|$ em que a frequência de cruzamento de fase ω_f satisfaz $\angle P(j\omega_f) = -180^\circ(2n + 1)$, $n \geq 0$.
- ▶ A margem de fase MF é calculada na frequência de cruzamento de ganho ω_g em que $|P(j\omega_g)| = 1$ (0 dB), ou seja, na interseção com o círculo unitário.
- ▶ A figura a esquerda apresenta uma planta em que $MF > 0$ e $MG > 0$ dB.



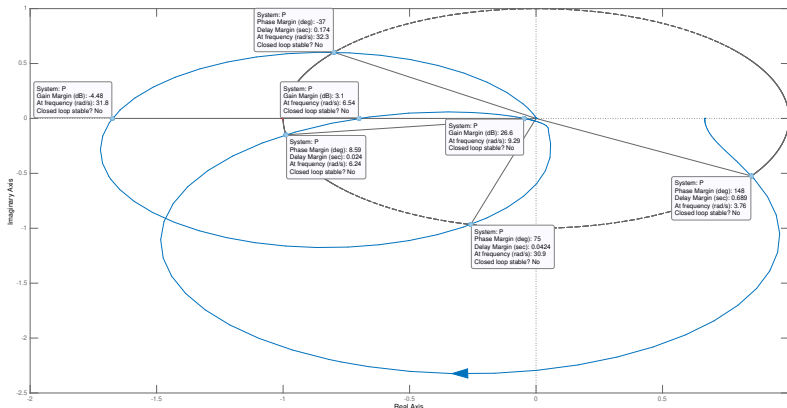
- ▶ A figura a direita apresenta uma planta em que $MF < 0$ e $MG < 0$ dB.

Margem de ganho e de fase

MG e MF no diagrama de Nyquist

- ▶ A figura abaixo apresenta o diagrama de Nyquist (para $\omega > 0$) da planta

$$P(s) = 2000 \frac{s^2 + s + 100}{(s + 10)(s^2 + s + 30)(s^2 + s + 1000)}$$

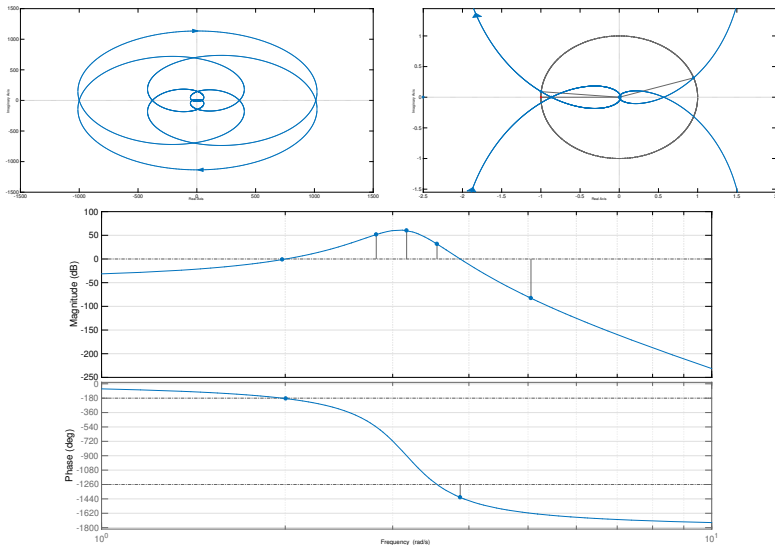


- ▶ O sistema apresentará (incluindo o trecho $\omega < 0$) duas voltas no sentido horário em volta do ponto -1 . Assim, existem dois polos instáveis em malha fechada.

Margem de ganho e de fase

MG e MF no diagrama de Nyquist

► Diagramas de Nyquist e de Bode da planta $P(s) = \frac{10^8}{(s^2 + s + 10)^{10}}$.



Margem de ganho e de fase

Projeto de um ganho estático usando MG e MF

- **Exemplo:** Determine a estabilidade do sistema para $K(s) = K$ e $P(s) = 1/(s+1)^2$

$$P(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)^2} = \frac{(1 - \omega^2)}{(1 - \omega^2)^2 + 4\omega^2} - j \frac{2\omega}{(1 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}$$

- O root locus assegura que o sistema é estável para $K > 0$.

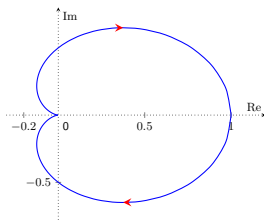
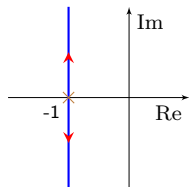
- Do diagrama de Bode, nota-se que $|P(j\omega)| < 0$ dB e $\angle P(j\omega) \in (0^\circ, -180^\circ)$ para $0 < \omega < \infty$. Assim, MG = ∞ .

- O diagrama de Nyquist está apresentado ao lado.

- Note que 1 envolvimento de $KP(s)$ em torno de -1 corresponde a 1 envolvimento de $P(s)$ em torno de $-1/K$.

- Portanto, o sistema será estável sempre que $-1/K$ estiver fora do contorno do Nyquist de $P(s)$, ou seja:

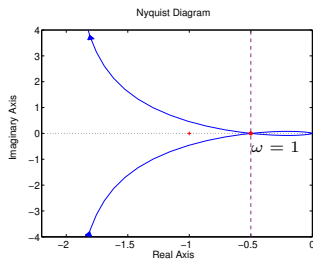
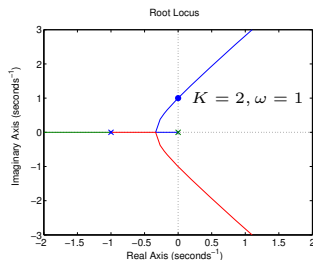
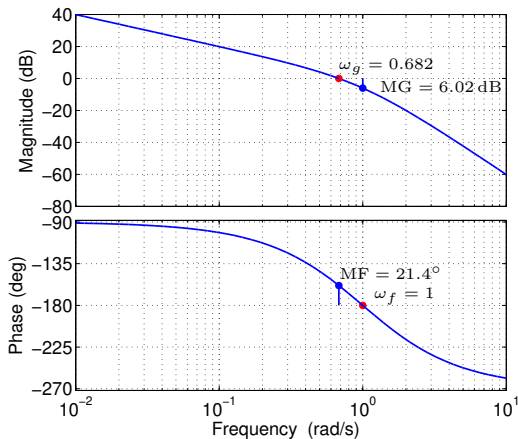
$$\begin{cases} -1/K < 0 & \Rightarrow & K > 0 \\ -1/K > 1 & \Rightarrow & -1 < K < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad K > -1$$



Margem de ganho e de fase

Projeto de um ganho estático usando MG e MF

► **Exemplo:** Considere a planta $P(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$



► Percebe-se que o sistema será estável sempre que $-1/K < -1/2$, ou seja, $0 < K < 2$ (6.02 dB).

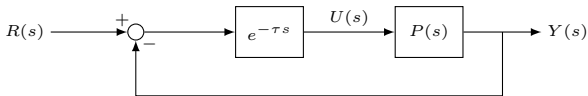
Margem de ganho e de fase

Margem de atraso (MA)

- ▶ A Margem de Atraso (MA) é caracterizada pelo máximo atraso $\tau > 0$ que pode ocorrer no sinal $u(t)$ na entrada da planta $P(s)$ antes do sistema tornar-se instável.
- ▶ Note que um atraso τ no sinal $u(t)$, corresponde no domínio da frequência ao produto por $e^{-\tau s}$, ou seja:

$$\mathcal{L}[u(t - \tau)\mu(t - \tau)] = e^{-\tau s} \mathcal{L}[u(t)]$$

como ilustrado na figura abaixo.



- ▶ MA, em segundos, é dada por $MA = \frac{MF}{\omega_g} \frac{[\text{rad}]}{[\text{rad/s}]}$.
- ▶ A planta $P(s) = 2/(s + 1)$, com $MF = 120^\circ$ em $\omega_g = \sqrt{3} \text{ rad/s}$, fornece $MA = 1.21 \text{ s}$.
- ▶ A figura apresenta a resposta ao degrau em malha fechada com $\tau = 1.21$ (no limite da estabilidade).



Margem de ganho e de fase

Relação da MF com o fator de amortecimento ζ

- Suponha que a malha aberta $G(s) = K(s)P(s)$ seja dada pelo sistema padrão:

$$G(s) = \omega_n^2 / (s(s + 2\zeta\omega_n))$$

- Como MF é calculada na frequência em que $|G(j\omega_g)| = 1$ (0 dB), tem-se

$$\omega_g = \omega_n \sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}$$

- Nessa frequência, o ângulo de $G(s)$ é dado por

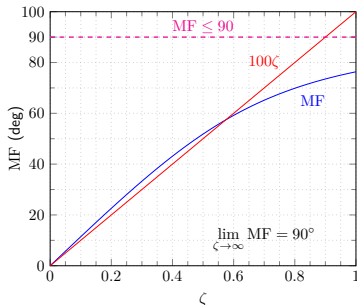
$$\angle G(j\omega_g) = -\angle j\omega_g - \angle(j\omega_g + 2\zeta\omega_n) = -90^\circ - \arctan \frac{\sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}}{2\zeta}$$

- Portanto, a margem de fase fica sendo:

$$\begin{aligned} \text{MF} &= 180^\circ + \angle G(j\omega_g) \\ &= \arctan \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}} \end{aligned}$$

- Assim, **na faixa $0 \leq \zeta \leq 0.7$** , uma aproximação bastante razoável é dada por

$$\text{MF} \approx 100\zeta$$



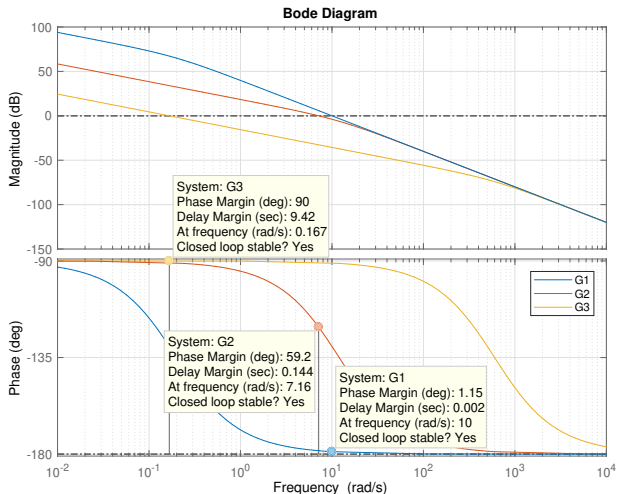
Margem de ganho e de fase

Relação da MF com o fator de amortecimento ζ

► **Exemplo:** A figura abaixo apresenta MF para as três plantas

$$G_i(s) = \omega_n^2 / (s(s + 2\zeta_i\omega_n)), \quad i = 1, 2, 3$$

em que $\zeta_1 = 0.01$, $\zeta_2 = 0.6$ e $\zeta_3 = 30$, com $\omega_n = 10$.



Projeto de controladores na frequência

Compensação por avanço de fase

- ▶ O compensador por avanço de fase é dado por

$$\mathcal{K}(s) = \hat{K} \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = \frac{\hat{K}}{\alpha} \frac{s + z}{s + p}, \quad \text{com } 0 < \alpha < 1 \text{ e } p > z > 0$$

- ▶ Note a relação entre z , p , e α dada por: $z = 1/T$, $p = 1/(\alpha T)$ e $\alpha p = z$.
- ▶ O ângulo de fase de $\mathcal{K}(s)$ é dado por $\phi(\omega) = \arctan(\omega T) - \arctan(\alpha T \omega)$
 $= -\tan^{-1} (T\omega(\alpha - 1)/(1 + \alpha T^2 \omega^2))$
- ▶ Frequência em que a fase é máxima:

$$\omega_{\phi_{\max}} = \sqrt{zp} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

- ▶ A fase máxima ϕ_{\max} é dada por:

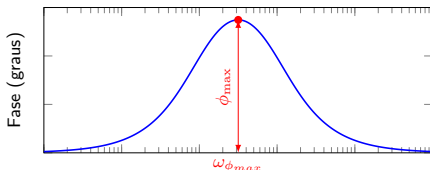
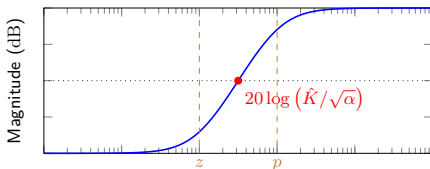
$$\sin \phi_{\max} = (1 - \alpha)/(1 + \alpha)$$

Equivalentemente:

$$\alpha = (1 - \sin \phi_{\max})/(1 + \sin \phi_{\max})$$

- ▶ O ganho em $\omega_{\phi_{\max}}$ é justamente:

$$|\mathcal{K}(j\omega_{\phi_{\max}})| = 20 \log (\hat{K}/\sqrt{\alpha}) \text{ dB}$$



Projeto de controladores na frequência

Compensação por avanço de fase

- ▶ **Exemplo:** Considere a malha de controle padrão com a planta $P(s) = 1/(s(s+1))$.
- ▶ O desempenho desejado em malha fechada é dado por:
 - ▶ erro estacionário à entrada rampa menor que 0.1;
 - ▶ Sobressinal (overshoot) menor que 20%.

- ▶ **Solução:** Calculando o erro estacionário à rampa $R(s) = 1/s^2$, tem-se

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \mathcal{K}(s)P(s)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + \frac{\mathcal{K}(s)}{s+1}} = \frac{1}{\mathcal{K}(0)}$$

- ▶ Como $e_{ss} \leq 0.1$, o ganho estático do controlador, dado por $\mathcal{K}(0) = \hat{K}$, deve satisfazer $\mathcal{K}(0) \geq 10$. Assim, o ganho é escolhido como sendo $\hat{K} = 10$.
- ▶ O sobressinal desejado $M_p < 20\%$ implica que $\zeta \geq 0.45$, que por sua vez implica uma margem de fase desejada MF $\geq 45^\circ$.
- ▶ A frequência de cruzamento de ganho ω_g para $\hat{K}P(s)$ é dada por

$$|\hat{K}P(j\omega_g)| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{10}{|j\omega_g||j\omega_g + 1|} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_g^2(\omega_g^2 + 1) = 100$$

- ▶ Resolvendo essa equação, obtém-se $\omega_g = 3.08$ rad/s.

Projeto de controladores na frequência

Compensação por avanço de fase

- ▶ A fase de $\hat{K}P(s)$ na frequência ω_g é dada por

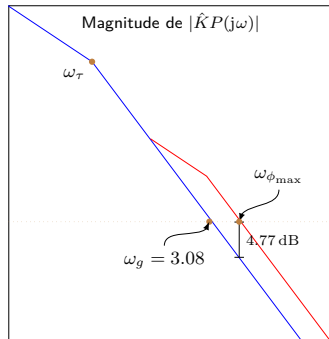
$$\phi(\omega_g) = \angle \hat{K}P(j\omega_g) = -90^\circ - 72^\circ = -162^\circ$$

- ▶ Portanto, a malha aberta $\hat{K}P(s)$ possui MF = 18°.
- ▶ Para se obter MF $\geq 45^\circ$, é necessário adicionar pelo menos 27°.
- ▶ Uma vez decidido o valor, por exemplo $\phi_{\max} = 30^\circ$, o parâmetro α é dado por:

$$\sin \phi_{\max} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{3}$$

- ▶ Na frequência $\omega_{\phi_{\max}}$, o aumento em magnitude de $\hat{K}P(s)$ será $20 \log(1/\sqrt{\alpha}) = 4.77$ dB.
- ▶ Para se determinar $\omega_{\phi_{\max}}$ é preciso agora calcular a nova frequência de cruzamento de ganho $\bar{\omega}$ tal que $|\hat{K}P(j\bar{\omega})| = -4.77$ dB = $1/\sqrt{3}$, como segue:

$$\frac{10}{|j\bar{\omega}||j\bar{\omega} + 1|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad 10\sqrt{3} = \bar{\omega}\sqrt{\bar{\omega}^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad \omega_{\phi_{\max}} = \bar{\omega} = 4.1$$



Projeto de controladores na frequência

Compensação por avanço de fase

- ▶ Note que a fase de $P(s)$, em $\bar{\omega} = 4.1 \text{ rad/s}$, é dada por $\angle P(j\bar{\omega}) = -166.3^\circ$. Assim, a adição de 30° exatamente nessa frequência, fornecerá $\text{MF} = 43.7^\circ$.

- ▶ O zero do compensador está localizado em

$$z = \omega_{\phi_{\max}} \sqrt{\alpha} = 4.1/\sqrt{3} = 2.37$$

- ▶ O polo do compensador está localizado em

$$p = z/\alpha = 2.37 \times 3 = 7.11$$

- ▶ O compensador fica sendo:

$$\mathcal{K}(s) = \frac{\hat{K}}{\alpha} \frac{s+z}{s+p} = 30 \frac{s+2.37}{s+7.11}$$

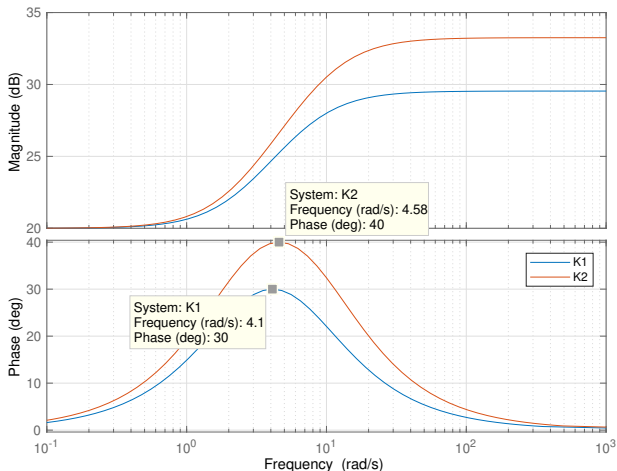
- ▶ Com esse compensador, $\text{MF} = 43.7^\circ$, como esperado, e o sobressinal foi de aproximadamente 29%.

- ▶ Usando $\phi_{\max} = 40^\circ$, foi obtido o compensador $\mathcal{K}(s) = 46 \frac{s+2.13}{s+9.82}$ que fornece um sobressinal de 20% e $\text{MF} = 52.3^\circ$ em $\omega_{\phi_{\max}} = \omega_g = 4.58 \text{ rad/s}$.

Projeto de controladores na frequência

Compensação por avanço de fase

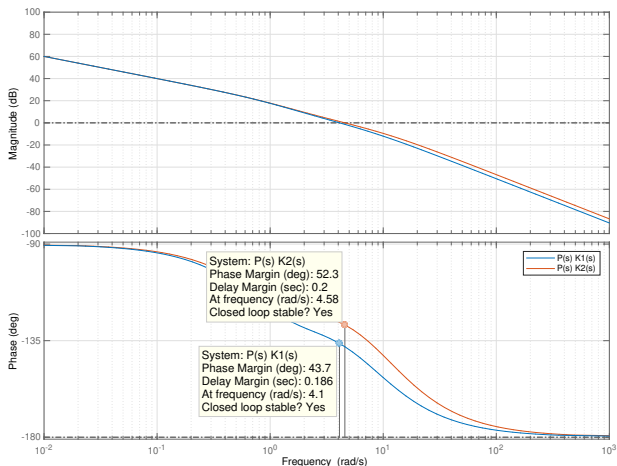
- Diagrama de Bode dos compensadores $K_1(s) = 30 \frac{s + 2.37}{s + 7.11}$ e $K_2(s) = 46 \frac{s + 2.13}{s + 9.82}$



Projeto de controladores na frequência

Compensação por avanço de fase

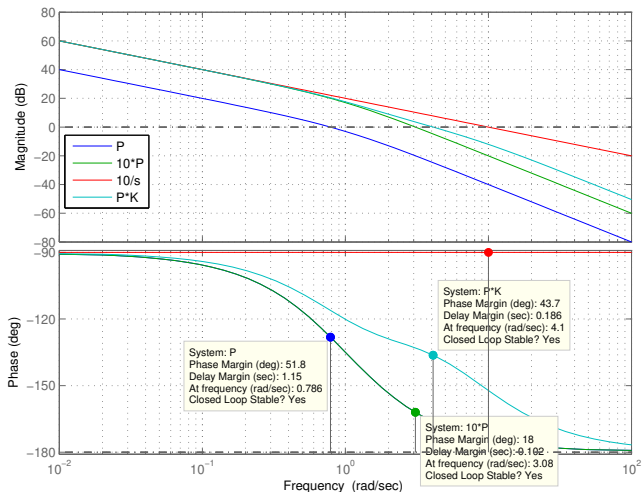
- Diagrama de Bode da malha aberta usando ambos os controladores $\mathcal{K}_1(s)$ e $\mathcal{K}_2(s)$



Projeto de controladores na frequência

Compensação por avanço de fase

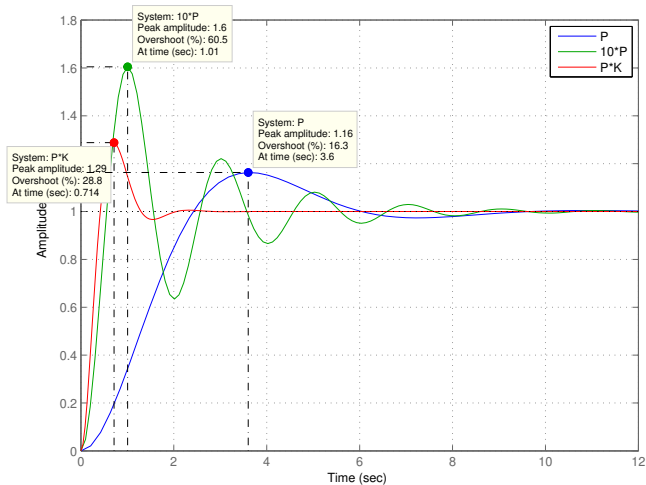
- A figura abaixo apresenta o diagrama de Bode de $P(s)$, de $10P(s)$, de $10/s$ e de $K(s)P(s)$ com $K(s) = 30(s + 2.37)/(s + 7.11)$



Projeto de controladores na frequência

Compensação por avanço de fase

- A figura abaixo apresenta a resposta ao degrau para o sistema em malha fechada usando: $P(s)$, $10P(s)$ e $K(s)P(s)$, com $K(s) = 30(s + 2.37)/(s + 7.11)$



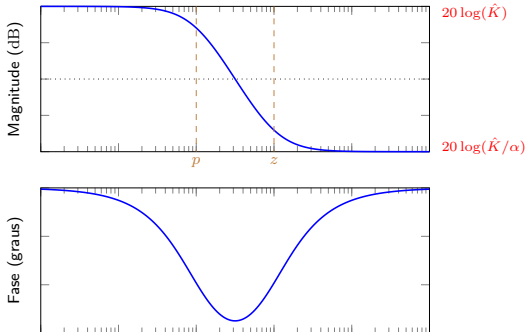
Projeto de controladores na frequência

Compensação por atraso de fase

- ▶ Para o compensador em atraso de fase, as fórmulas anteriores se mantêm válidas, porém $\alpha > 1$:

$$\mathcal{K}(s) = \hat{K} \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = \frac{\hat{K}}{\alpha} \frac{s + z}{s + p}, \quad \text{com } \alpha > 1 \text{ e } z > p > 0$$

- ▶ A forma do diagrama de Bode está apresentada na figura abaixo.



- ▶ Com esse compensador, é possível aumentar o ganho estático da malha aberta sem alterar a frequência de cruzamento de ganho, mantendo assim a MF original.

Projeto de controladores na frequência

Compensação por atraso de fase

- ▶ **Exemplo:** Repetir o problema anterior em que $P(s) = 1/(s(s+1))$ usando o controlador em atraso de fase.
- ▶ O ganho estático para garantir um erro estacionário de 0.1 tinha sido determinado como sendo $\mathcal{K}(0) = 10$. Assim $\hat{K} = 10$.
- ▶ Notando que $P(s)$ tem MF = 51.8° em $\omega_g = 0.786$, que já atende a especificação $\zeta \geq 0.45$, pode-se então **escolher $\alpha = 10$** de forma a manter ω_g e MF inalterados.
- ▶ A escolha de T determina a localização do polo e do zero. Para não alterar ω_g e MF, o ideal é alocar o polo e o zero bem abaixo da frequência de cruzamento de ganho.
- ▶ Escolhendo $T = 100$, tem-se $z = 1/T = 0.01$ e $p = 1/(\alpha T) = 0.001$, fornecendo:

$$\mathcal{K}_1(s) = \frac{\hat{K}}{\alpha} \frac{s+z}{s+p} = \frac{s+0.01}{s+0.001}$$

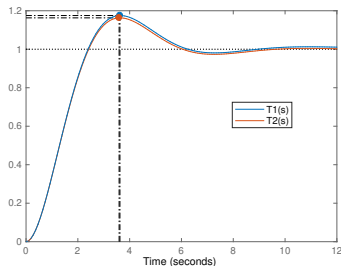
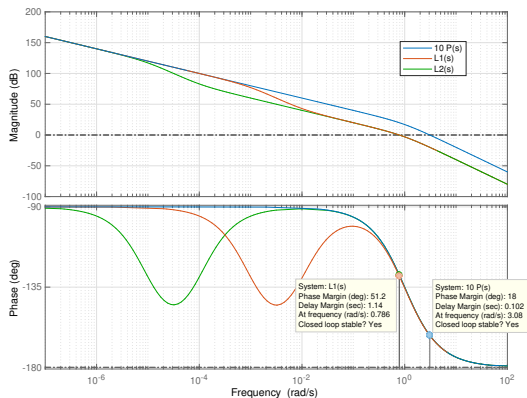
- ▶ **Observação:** Não deve-se selecionar a localização dos polos numa frequência mais baixa do necessário, como por exemplo, o compensador abaixo:

$$\mathcal{K}_2(s) = \frac{s+10^{-4}}{s+10^{-5}}$$

Projeto de controladores na frequência

Compensação por atraso de fase

- Diagrama de Bode de $10P(s)$, $L_1(s) = \mathcal{K}_1(s)P(s)$ e $L_2(s) = \mathcal{K}_2(s)P(s)$.

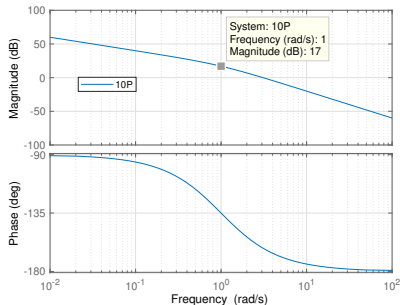


- Percebe-se que ambos os controladores forneceram as especificações desejadas.
- No entanto, o compensador $\mathcal{K}_2(s)$ possui polos muito mais próximos do eixo imaginário; o que não é algo desejável.

Projeto de controladores na frequência

Compensação por atraso de fase

- ▶ **Exemplo:** É possível calcular $K(s)$ para fornecer MF de forma quase exata.
- ▶ Suponha que se deseje uma margem de fase MF = 45° para o exemplo anterior em que a planta é dada por $P(s) = 1/(s(s+1))$ e $\hat{K} = 10$, para fornecer K_v adequado.
- ▶ Assim, o ângulo na (nova) frequência de cruzamento de ganho ω_g deverá ser
$$\angle P(j\omega_g) = -180^\circ + 45^\circ = -135^\circ$$
- ▶ Como a fase de $10P(s)$ já passa em -135° , basta agora determinar a frequência corresponde de forma a fazer com que seja ω_g .



Projeto de controladores na frequência

Compensação por atraso de fase

- ▶ A frequência de cruzamento de ganho ω_g é determinada como segue:

$$-135^\circ = \angle P(j\omega_g) = -\angle j\omega_g - \angle j\omega_g + 1 = -90^\circ - \tan^{-1} \omega_g \implies \omega_g = 1 \text{ rad/s}$$

- ▶ Nessa frequência, considerando que $\hat{K} = 10$, a magnitude é

$$\left| 10P(j\omega_g) \right|_{\omega_g=1} = 5\sqrt{2} = 17 \text{ dB}$$

- ▶ Assim, $\mathcal{K}(s)$ precisa remover exatamente $-20 \log_{10}(5\sqrt{2}) = -17 \text{ dB}$ para que a nova frequência de cruzamento de ganho esteja exatamente em $\omega_g = 1 \text{ rad/s}$.
- ▶ Como o ganho total (desconsiderando \hat{K}) de $\mathcal{K}(s)$ é $-20 \log_{10}(\alpha)$, tem-se $\alpha = 5\sqrt{2}$.
- ▶ Escolhendo-se a localização do compensador, **significativamente abaixo** da nova frequência de corte, por exemplo, em $\omega_{\phi_{\max}} = \omega_g/200 = 0.005 \text{ rad/s}$, tem-se:

$$T = 1/(\omega_{\phi_{\max}} \sqrt{\alpha}) = 75.2121, \quad z = 1/T = 0.0133 \quad \text{e} \quad p = 1/(\alpha T) = 0.0019$$

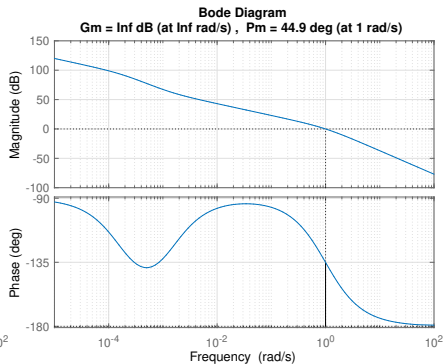
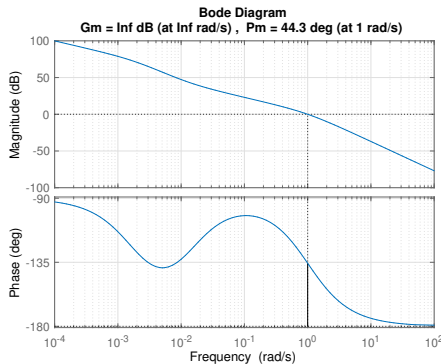
- ▶ Assim, o controlador fica sendo: $\mathcal{K}(s) = \frac{\hat{K}}{\alpha} \frac{(s+z)}{(s+p)} = \frac{10}{5\sqrt{2}} \frac{(s+0.0133)}{(s+0.0019)}$

Projeto de controladores na frequência

Compensação por atraso de fase

- ▶ A figura (esquerda) apresenta o diagrama de Bode de $L(s) = K(s)P(s)$ em que:

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad \text{e} \quad \mathcal{K}(s) = \frac{10}{5\sqrt{2}} \frac{(s+0.0133)}{(s+0.0019)}$$



- ▶ A margem de fase obtida foi **MF = 44.3°** ao invés de $MF = 45^\circ$. Note que esse controlador **contribui com uma fase negativa** (embora pequena) em torno de ω_g .
- ▶ A figura (direita) apresenta o diagrama de Bode com o compensador projetado usando-se $\omega_{\phi_{\max}} = \omega_g / \mathbf{2000} = 0.0005 \text{ rad/s}$, que fornece $MF = 44.9^\circ$.

Projeto de controladores na frequência

Projeto de forma a garantir MF e ω_g exatos

- ▶ **Exemplo:** Também é possível efetuar o projeto de $K(s)$ de forma a fornecer **precisamente** uma margem de fase MF desejada numa frequência específica ω_g .
- ▶ Considere o problema anterior em que $P(s) = 1/(s(s+1))$ com a seguinte especificação: **MF = 63°** em **$\omega_g = 3.08$ rad/s**.
- ▶ Suponha que o controlador tenha a seguinte forma:

$$K(s) = K \frac{s+z}{s+p}$$

- ▶ As equações que fornecem MF = 63° em $\omega_g = 3.08$ rad/s são dadas por:

$$|K(s)P(s)|_{s=j\omega_g} = 1 \text{ (0 dB)} \quad \text{e} \quad \angle K(s)P(s)|_{s=j\omega_g} = -117^\circ$$

- ▶ A primeira equação fornece

$$\left| K \frac{s+z}{s+p} P(s) \right|_{s=j\omega_g} = 1 \quad \Rightarrow \quad K \left| \frac{j\omega_g + z}{j\omega_g + p} \right| |P(j\omega_g)| = 1$$

- ▶ Como $|P(j\omega_g)| = 0.1026$, tem-se assim:

$$K \frac{|j\omega_g + z|}{|j\omega_g + p|} = 1/|P(j\omega_g)| = 9.974$$

Projeto de controladores na frequência

Projeto de forma a garantir MF e ω_g exatos

- Da condição $\angle K(s)P(s)|_{s=j\omega_g} = -117^\circ$ com $\angle P(s)|_{s=j\omega_g} = -162^\circ$, obtém-se

$$\angle K(j\omega_g) = \angle(j\omega_g + z) - \angle(j\omega_g + p) = \beta = 45^\circ \Rightarrow \arctan \frac{\omega_g}{p} = \arctan \frac{\omega_g}{z} - 45^\circ$$

- Aplicando a relação trigonométrica (notando que $\tan^{-1}(\tan(x)) \neq x$)

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan(\alpha) \tan(\beta)}$$

com $\alpha = \arctan \omega_g/z$ e $\beta = 45^\circ$ ($\tan 45^\circ = 1$), obtém-se

$$\boxed{\frac{\omega_g}{p} = \frac{\omega_g/z - \tan \beta}{1 + (\omega_g/z) \tan \beta} = \frac{\omega_g - z \tan \beta}{z + \omega_g \tan \beta}} \Rightarrow p = \frac{\omega_g(\omega_g \tan \beta + z)}{\omega_g - z \tan \beta}$$

- **Escolhendo** $z = \omega_g/3 = 1.03$, tem-se $p = 2\omega_g = 6.16$. O ganho K é obtido de

$$K \frac{|j\omega_g + z|}{|j\omega_g + p|} = 9.974 \Rightarrow 0.4714 K = 9.974 \Rightarrow K = 21.16$$

- O controlador, que fornece **exatamente** MF = 63° em $\omega_g = 3.08$ rad/s, é dado por

$$K(s) = 21.158 \frac{s + 1.027}{s + 6.16}$$

- Nesse projeto, o ganho estático \hat{K} **não pode ser arbitrariamente** especificado.

Projeto de controladores na frequência

Projeto de forma a garantir MF e ω_g exatos

- Para dados ω_g e β , a relação entre p e z é dada por

$$p = \frac{\omega_g(\omega_g \tan \beta + z)}{\omega_g - z \tan \beta} \quad \text{e} \quad z = \frac{\omega_g(p - \omega_g \tan \beta)}{\omega_g + p \tan \beta}$$

com β o ângulo que o controlador $K(s)$ deve fornecer para garantir MF e ω_g .

- Note que z está limitado por $z < \omega_g / \tan \beta$. O valor de z que produz o **maior ganho estático** é obtido no limite com $z \rightarrow \omega_g / \tan \beta$ e $p \rightarrow +\infty$.

