# ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

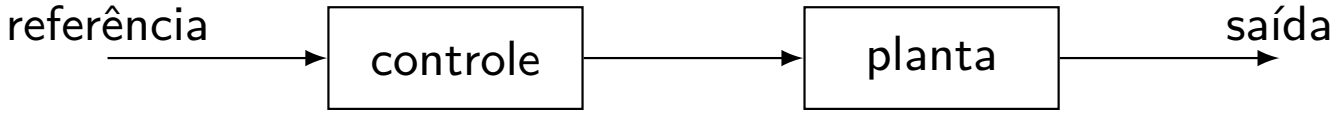
# Nota ao leitor

- Estas notas são baseadas principalmente nas referências:
  - K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, $4^a$ edição, Pearson Education do Brasil, 2003.
  - G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Ed., P.-Hall, 2010.
  - G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Digital Control of Dynamic Systems*, 2nd Ed., Add.-Wesley, 1994.
- Material suplementar:
  - K. Ogata, *Discrete-time control systems*, 2nd Edition, P.-Hall, 1995.
  - R. C. Dorf and R. H. Dorf, *Sistemas de controle Modernos*, $8^a$ edição, LTC Livros Técnicos e científicos, 2001.
  - J. R. Rowland, *Linear Control Systems: Modeling, analysing, and design*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
  - B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall, 1994.

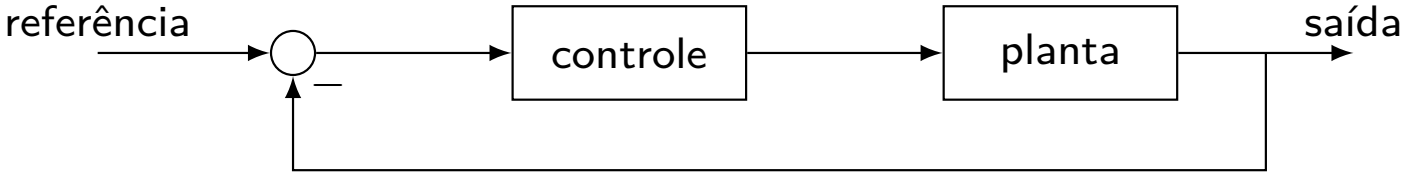
# Introdução

## Conceitos básicos

- Controle: é o processo que leva variáveis de um sistema a se ajustarem a valores desejados, chamados de valores de referência.
- Controle automático: não há interferência humana. Por exemplo, no controle de temperatura cuja ação de controle (liga/desliga) é regulada por um termostato.
- Planta: representa o modelo do sistema físico em estudo.
- Sistema em malha aberta: controle de tráfego, máquina de lavar roupa, etc.

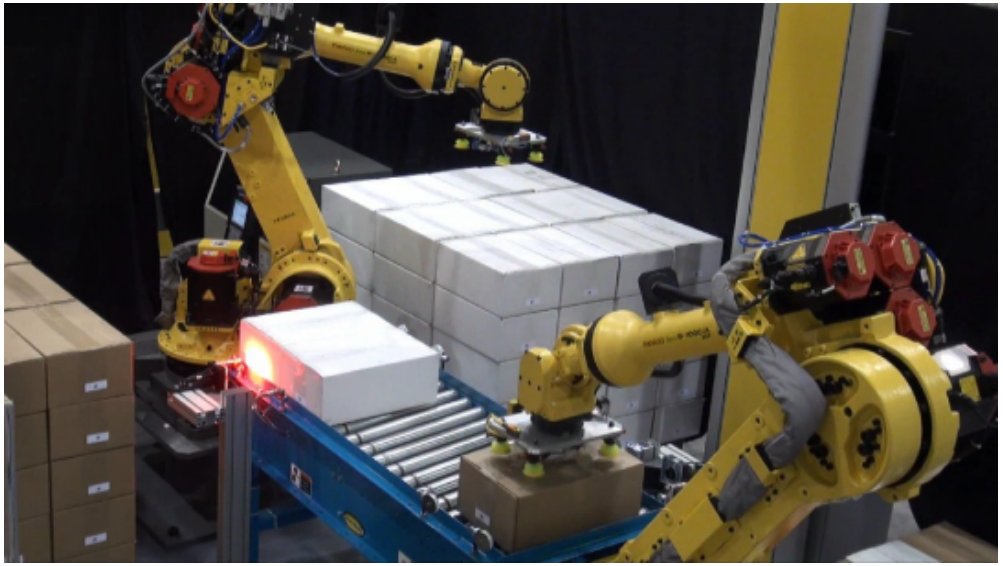



- Realimentação: é o processo de medir a variável de controle (por exemplo, a temperatura da sala) e usar essa informação para influenciar na ação de controle.
- Sistema em malha fechada: controle de velocidade de um motor, controle de navegação de um avião, etc.



# Introdução

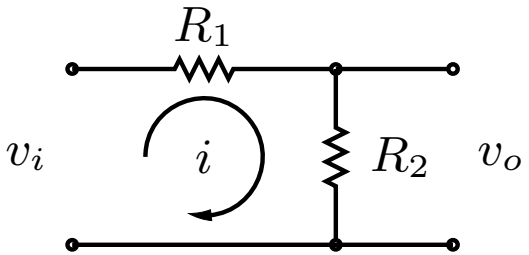
## Aplicações industriais

# Introdução

## Sistema de controle em malha aberta

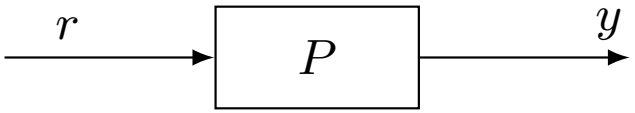
- Considere o seguinte exemplo de um sistema em malha aberta, em que $v_i$ é uma tensão de entrada, $v_o$ é a tensão de saída e $R_i$ são resistências.




- Definindo $r = v_i$, $y = v_o$ e $P$ por

$$P = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

o diagrama de bloco para esse circuito é

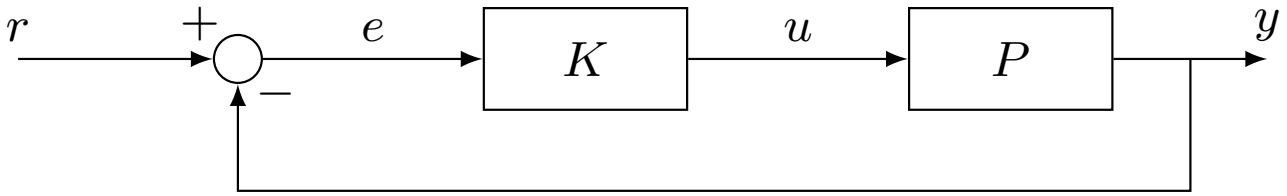



- Assim, $y = Pr = R_2/(R_1 + R_2)r$. Se $R_2 = R_1 = 10\Omega$, então $y = r/2$.
- Note que se $P$ variar, a saída $y$ também variará. Por exemplo, se $P \to P + \delta P$, então $y = Pr + \delta Pr$.

# Introdução

## Sistema de controle em malha fechada

- Considere o exemplo anterior numa configuração em malha fechada, em que o controlador $K$ é um ganho estático (uma constante).




- Calculando o sistema em malha fechada, obtém-se

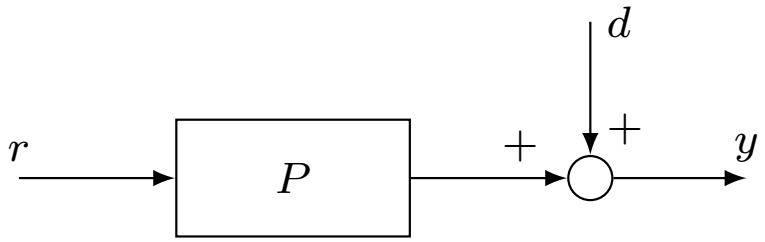
$$\left.\begin{aligned} y &= PKe \\ e &= r - y \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad y = PK(r-y)$$

- Colocando $y$ em evidência, tem-se

$$y = \frac{PK}{1+PK} r$$

- Assim, se $PK \gg 1$, tem-se que $y \approx r$.
- Por exemplo, se $P = 1/2$ e $K = 100$, tem-se $PK = 50$ e $y = 50/51r \Rightarrow y \approx r$.
- A saída do nosso circuito é simplesmente a referência desejada. Note que a saída é insensível à variação em $P$.

- Considere o diagrama abaixo em que $P$ é a planta, $r$ é o sinal de referência, $y$ é a saída e $d$ é um distúrbio exógeno.
- O distúrbio $d$ pode por exemplo ser um ruído contaminando o sinal medido por um transdutor.




- A saída desse sistema é dada por

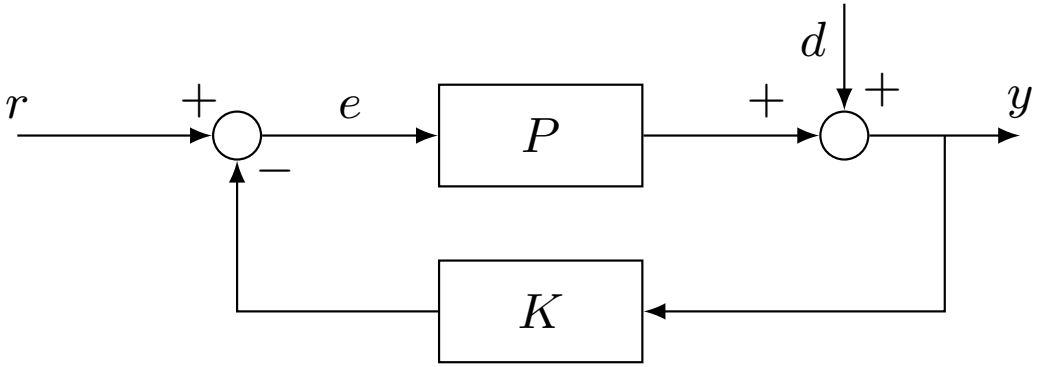
$$y = Pr + d$$

- Fica claro que nessa configuração, a saída é fortemente influenciada pelo distúrbio $d$.

# Introdução

## Supressão de distúrbio

- Considere o sistema em malha fechada em que $K$ é um ganho (controlador).




- Para obter o sistema em malha fechada, procede-se como segue

$$\left.\begin{aligned} y &= Pe + d \\ e &= r - Ky \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad y = P(r - Ky) + d$$

- Colocando $y$ em evidência, tem-se

$$(1 + PK)y = Pr + d \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{P}{1 + PK} r + \frac{1}{1 + PK} d$$

- Agora, se $PK \gg 1$, então

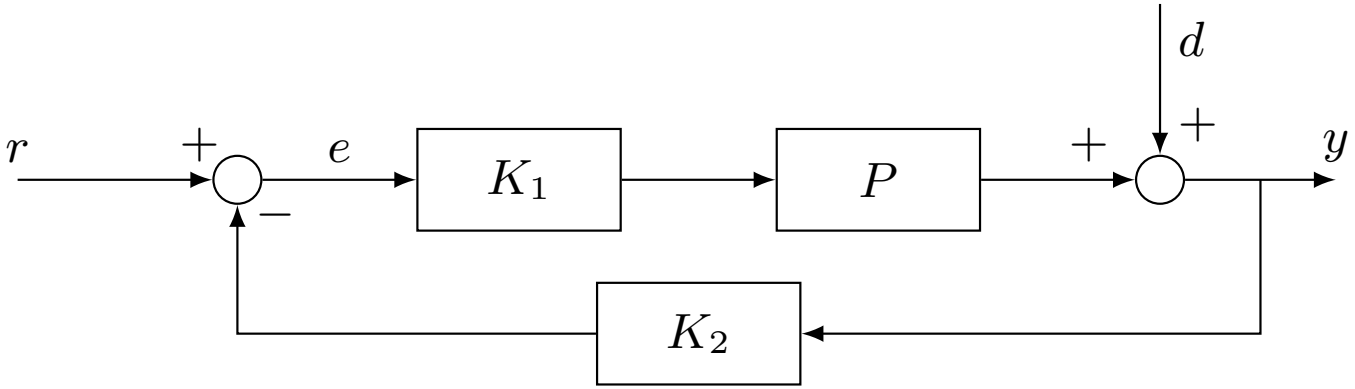
$$y \approx \frac{1}{K} r + \frac{1}{PK} d$$

- Nessa configuração, o efeito do distúrbio é mitigado na saída do sistema, porém, se $K \gg 1$, a saída também será praticamente nula.

# Introdução

## Supressão de distúrbio

- Considere a configuração abaixo que utiliza dois ganhos (controladores) $K_1$ e $K_2$.




- Para obter o sistema em malha fechada, procede-se como segue

$$\left.\begin{aligned} y &= PK_1e + d \\ e &= r - K_2y \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad y = PK_1(r - K_2y) + d$$

- Colocando $y$ em evidência, tem-se

$$(1 + PK_1K_2)y = PK_1r + d \quad \Rightarrow \quad y = \frac{PK_1}{1 + PK_1K_2}r + \frac{1}{1 + PK_1K_2}d$$

- Agora, é possível escolher $K_1$ e $K_2$ de forma a mitigar o efeito do distúrbio $d$ e fazer com que a saída $y$ se aproxime da referência $r$.

# Introdução

## Supressão de distúrbio

- Suponha que $P = 10$ e a relação entrada/saída desejada seja $y = 10r$ (com $d = 0$).
- Assim, o sistema inicial em malha aberta fica sendo $y = 10r + d$.
- O sistema em malha fechada com $P = 10$ fica sendo

$$y = \frac{10K_1}{1 + 10K_1K_2} r + \frac{1}{1 + 10K_1K_2} d$$

- Note que é impossível eliminar totalmente o ruído com valores finitos de $K_1$ e $K_2$.
- Suponha que se deseje uma influência máxima de 10% do distúrbio $d$ na saída $y$:

$$\left| \frac{1}{1 + 10K_1K_2} d \right| \leq 0.1|d|$$

- Essa equação é satisfeito sempre que

$$\frac{1}{1 + 10K_1K_2} \leq 0.1$$

# Introdução

## Supressão de distúrbio

- Usando a relação desejada para a saída, tem-se

$$y = 10r \quad \Rightarrow \quad \frac{10K_1}{1 + 10K_1K_2} = 10$$

- É necessário resolver as duas equações simultaneamente:

$$\frac{1}{1 + 10K_1K_2} = 0.1$$
$$\frac{10K_1}{1 + 10K_1K_2} = 10$$

- Substituindo a primeira equação na segunda, obtém-se

$$\frac{10K_1}{10} = 10 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 10$$

- Substituindo $K_1$ na segunda expressão, fornece

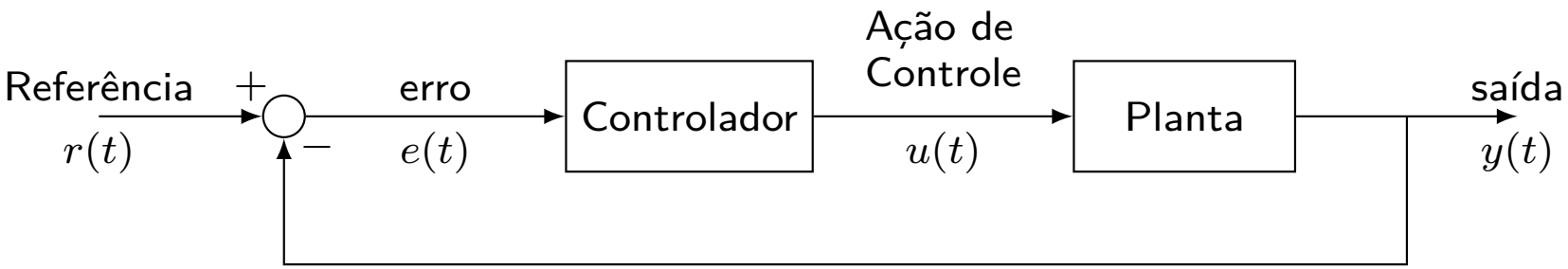
$$\frac{10}{1 + 100K_2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad K_2 = \frac{9}{100}$$

- Portanto, a saída do sistema fica sendo $y = 10r + 0.1d$.

# Introdução

## Ações de controle básicas

- Controle do tipo proporcional, integral e derivativo.
- Considere a malha de controle apresentada abaixo.




- Ação de controle proporcional:

$$u(t) = K_P\, e(t)$$

- Ação de controle integral:

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = K_I\, e(t) \quad \Rightarrow \quad u(t) = K_I \int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau$$

- Ação de controle proporcional-integral-derivativo:

$$u(t) = K_P\, e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau + K_D \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$$

# Introdução

## Integral de convolução

- Seja o sistema abaixo com entrada $x(t)$, saída $y(t)$ e resposta impulsiva $h(t)$.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

- Se esse sistema for linear, causal e invariante no tempo, a relação entre a entrada $x(t)$ e a saída $y(t)$ é dada pela seguinte integral de convolução

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

assumindo-se que $x(t) = 0$ para $t < 0$,

- Aplicando a transformada de Laplace na integral de convolução

$$y(t) = \int_{0^-}^t h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{0^-}^t h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

obtém-se a função transferência:

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

# Introdução

## Função de transferência

- Considere a função de transferência:

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

- Percebe-se que para uma entrada impulsiva $X(s) = 1$, a saída é

$$Y(s) = H(s)$$

- Portanto, $H(s)$ é transformada de Laplace da resposta ao impulso $h(t)$, ou seja

$$H(s) = \int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

- Considere a equação diferencial

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_o x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \cdots + b_{m-1}\dot{x} + b_m x$$

- Assumindo condições iniciais nulas tem-se

$$\begin{aligned} H(s) := \frac{Y(s)}{X(s)} &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \\ &= K_1 \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} = K_2 \frac{(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)} \end{aligned}$$

# Propriedades de sistemas contínuos

## Conceitos básicos

- Considere o sistema abaixo, em que $x(t)$ é a entrada e $y(t)$ a saída.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{sistema}} \longrightarrow y(t)$$

- Linearidade: Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ as saídas para as entrada $x_1(t)$ e $x_2(t)$, respectivamente. Então, o sistema é linear se a saída para a entrada

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \qquad \text{for} \qquad y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

  Exemplo: O sistema $\dot{y}(t) = x(t)$ com $y(0) = 0$ é linear, já que

$$y = \int_0^t \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha \int_0^t x_1 + \beta \int_0^t x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2$$

  Exemplo: O sistema $\dot{y}(t) + y^2(t) = x(t)$ com $y(0) = 0$ não é linear, já que para uma entrada constante qualquer $x(t) = c$, a saída é dada por

$$y(t) = \sqrt{c}\,\tanh(\sqrt{c}\,t)$$

  que claramente é uma relação não linear. Para $x = c_1 + c_2$, tem-se $y \neq y_1 + y_2$.

- Também conhecido como princípio da superposição:

$$F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2) \qquad \text{Aditividade}$$

$$F(\alpha x) = \alpha F(x) \qquad \text{Homogeneidade}$$

# Propriedades de sistemas contínuos

## Conceitos básicos

- Causalidade: Um sistema é dito causal (não antecipativo), se a saída num instante de tempo $\tau$ depender apenas de valores da entrada em $t \leq \tau$.

  Exemplo: O sistema $y(t) = \cos(t+1)\, x(t)x(t-3)$ é causal, já que a saída no instante $t = \tau$ depende da entrada no instante $\tau$ e no instante passado $\tau - 3$.

  Exemplo: O sistema $y(t) = \cos(t)\, x(t+1)$ não é causal, já que a saída no instante $t = \tau$ depende da entrada no instante futuro $\tau + 1$.

- Invariância no tempo: Se $y(t)$ é a saída de um sistema invariante no tempo quando $x(t)$ é a entrada, então $y(t-\tau)$ será a saída quando $x(t-\tau)$ for a entrada.

  Exemplo: Seja $y(t) = tx(t)$. Seja $y_i(t)$ a saída para a entrada $x_i(t)$. Então:

  $$y_1(t) = tx_1(t)$$

  Seja $x_2(t) = x_1(t-\tau)$, então

  $$y_2(t) = tx_2(t) = tx_1(t-\tau)$$

  No entanto,

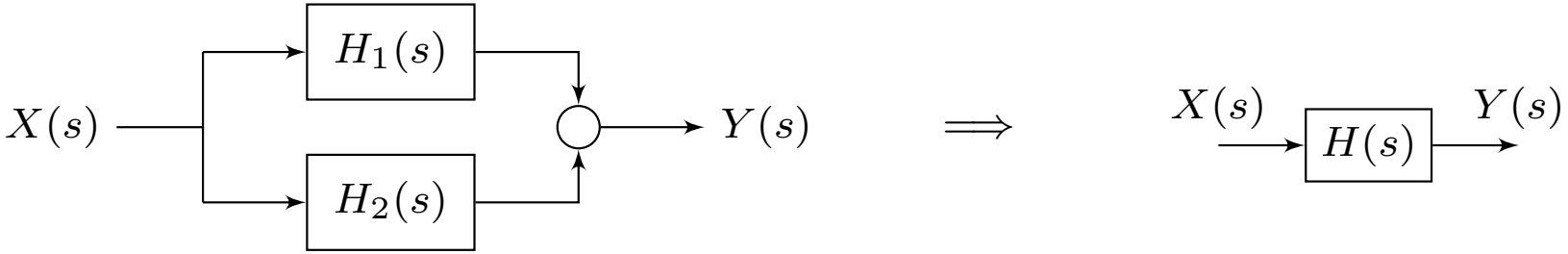
  $$y_1(t-\tau) = (t-\tau)x_1(t-\tau) \neq y_2(t)$$

  Portanto, esse sistema não é invariante no tempo (é um sistema variante no tempo).

# Diagrama de blocos

## Operações básicas

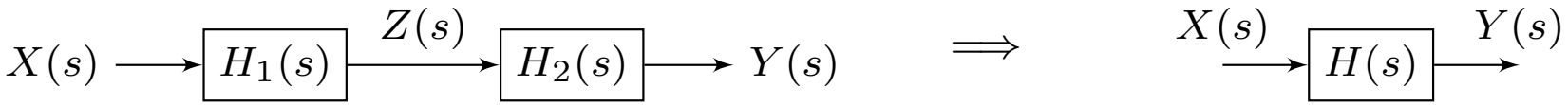
- Conexão em paralelo de duas funções de transferência $H_1$ e $H_2$.




- Para essa configuração, a função de transferência equivalente é dada por

$$H = H_1 + H_2$$

- Conexão em série de duas funções de transferência $H_1$ e $H_2$.




- Como $Y = H_2 Z$ e $Z = H_1 X$, tem-se que $Y = H_2 H_1 X$ e, ou seja

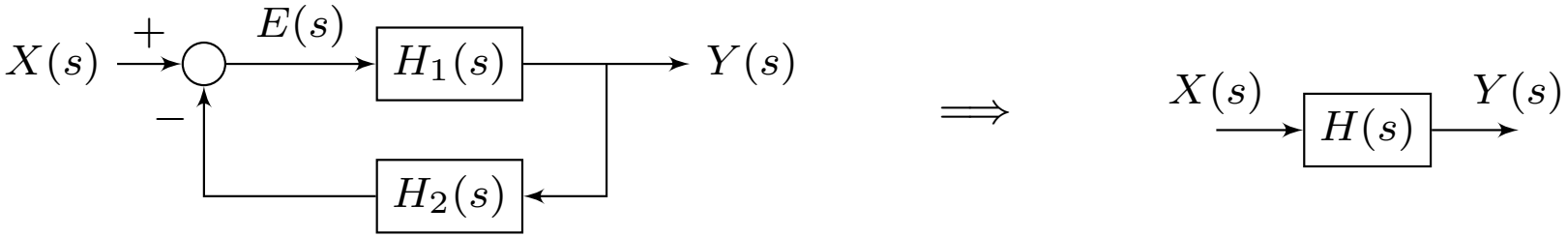
$$H = H_2 H_1$$

- No Matlab, pode-se usar os comandos **H=parallel**$(\boldsymbol{H_1}, \boldsymbol{H_2})$ e **H=series**$(\boldsymbol{H_1}, \boldsymbol{H_2})$.

# Diagrama de blocos

## Operações básicas

- Conexão em feedback, também denominada de realimentação ou retroalimentação.




- Para determinar a função de transferência equivalente $H$, basta seguir o fluxo.

- Do diagrama, tem-se

$$Y = H_1 E \qquad \text{e} \qquad E = X - H_2 Y$$

- Substituindo uma equação na outra, obtém-se

$$Y = H_1(X - H_2 Y) \quad \Longrightarrow \quad Y + H_1 H_2 Y = H_1 X \quad \Longrightarrow \quad Y = \frac{H_1}{1 + H_1 H_2} X$$

- Portanto, a função de transferência equivalente é dada por

$$H = \frac{H_1}{1 + H_1 H_2}$$

- No Matlab, pode-se usar o comando **H=feedback($H_1$, $H_2$)**.

# Diagrama de blocos

## Representação de funções de transferência

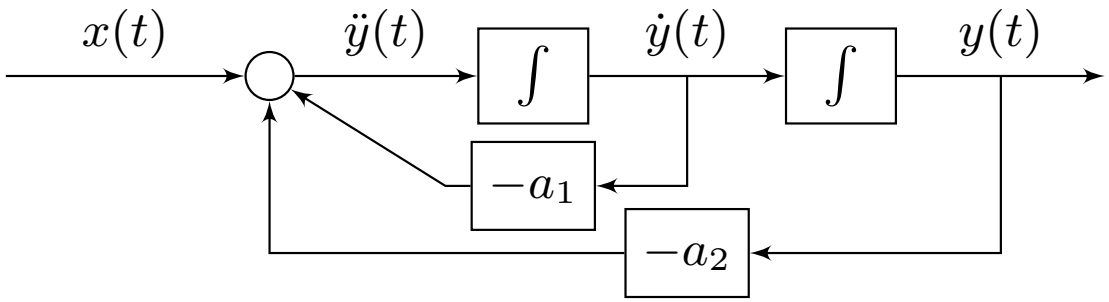
- Pode-se representar por diagrama de blocos uma equação diferencial.
- Considere a equação diferencial de segunda ordem dada por

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2 y(t) = x(t)$$

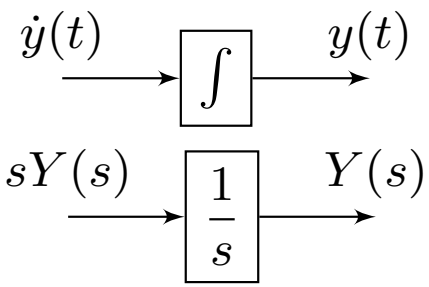
que pode ser escrita de forma equivalente como

$$\ddot{y}(t) = x(t) - a_1\dot{y}(t) - a_2 y(t)$$

- Sua representação por diagrama de blocos é dada por




Bloco Integrador



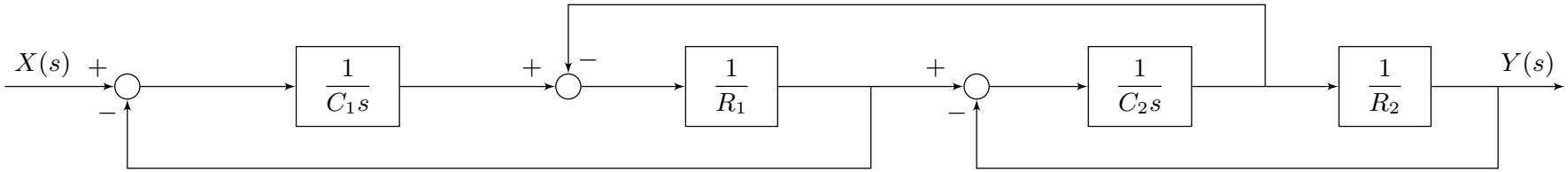

- Note que esse sistema corresponde à função de transferência

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

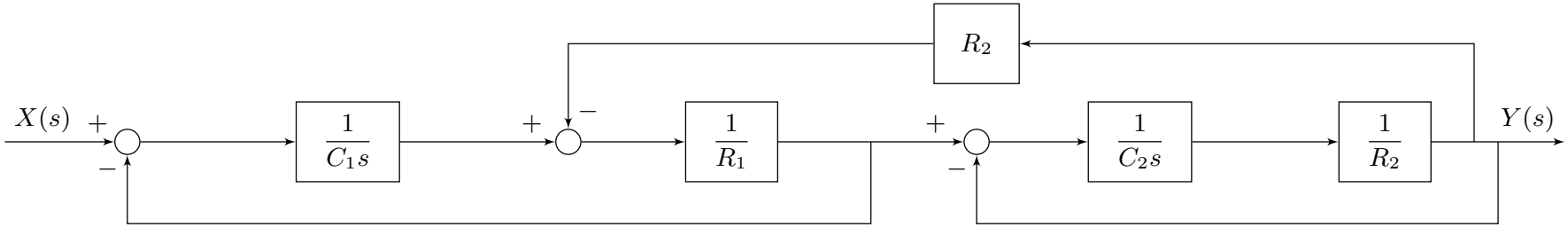
# Diagrama de blocos

## Simplificação de diagramas de blocos

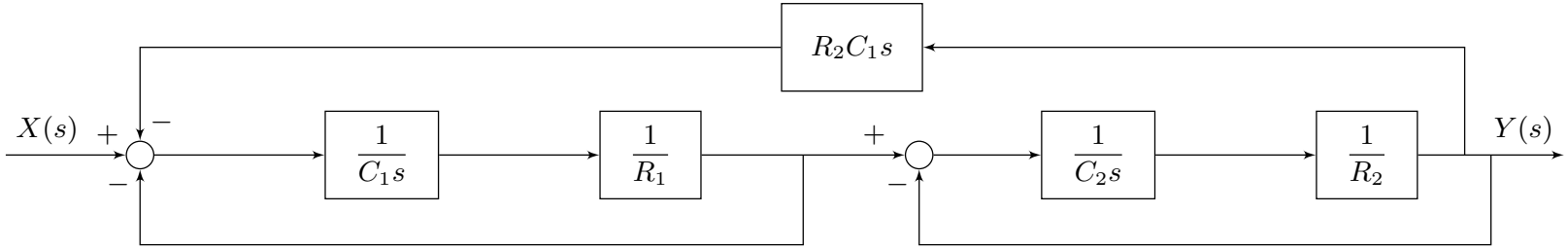
- Considere o diagrama de blocos abaixo.




- Movendo o laço direito da realimentação para fora da segunda malha, têm-se



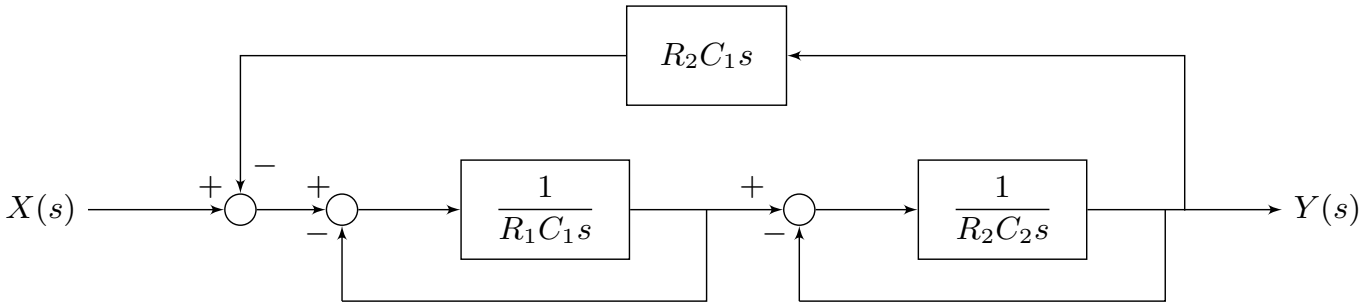

- Movendo o laço esquerdo da realimentação para fora da primeira malha, têm-se



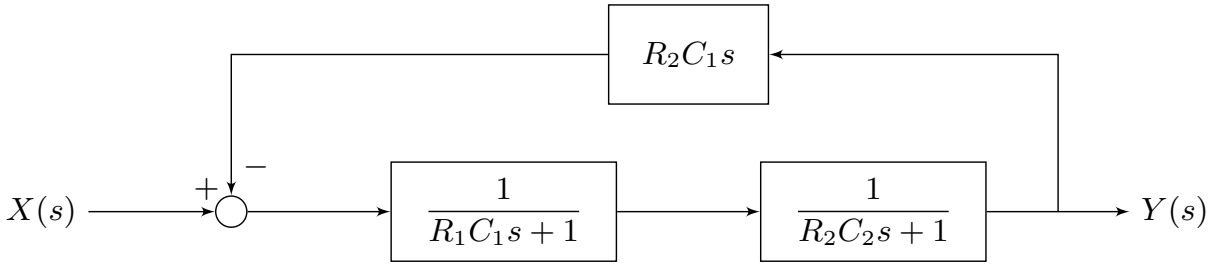
# Diagrama de blocos

## Simplificação de diagramas de blocos

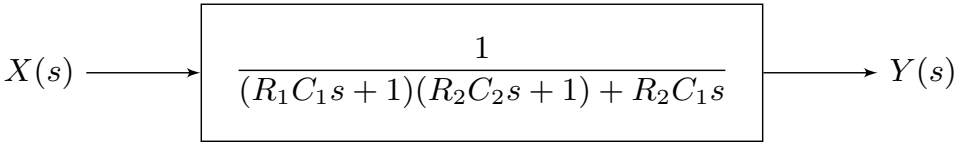
- O último passo forneceu, após as conexões em série, o diagrama abaixo.




- Simplificando as duas malhas (internas) em feedback, tem-se




- Finalmente, realizando a conexão em série e a retroalimentação, obtém-se



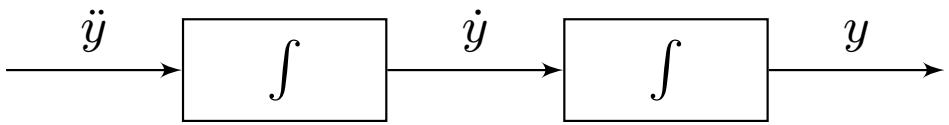
# Simulação numérica

## Diagramas de blocos no Simulink

- Exemplo: Represente por diagrama de blocos a equação de 2ª ordem abaixo:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

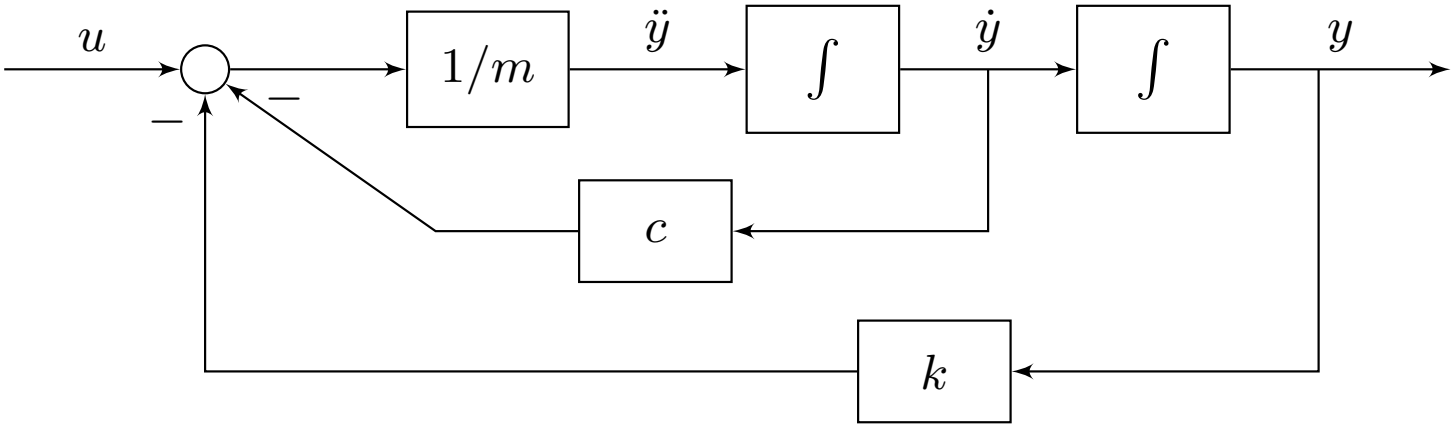
- Como a equação é de 2ª ordem, serão necessários dois integradores, como segue:




- Notando agora que

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{m}\big(u(t) - c\dot{y}(t) - ky(t)\big)$$

obtém-se finalmente o diagrama abaixo.



# Simulação numérica

## Diagramas de blocos no Simulink

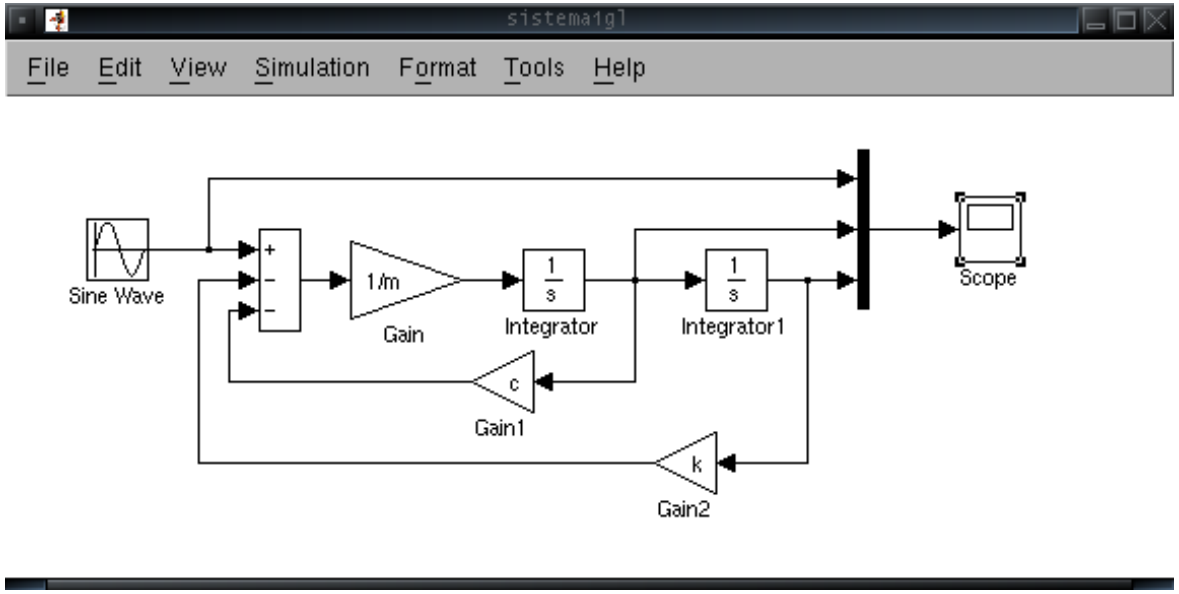
- Considere a equação de movimento de um sistema mecânico dada por

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

- Sua função de transferência é dada por

$$H(s) = Y(s)/U(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

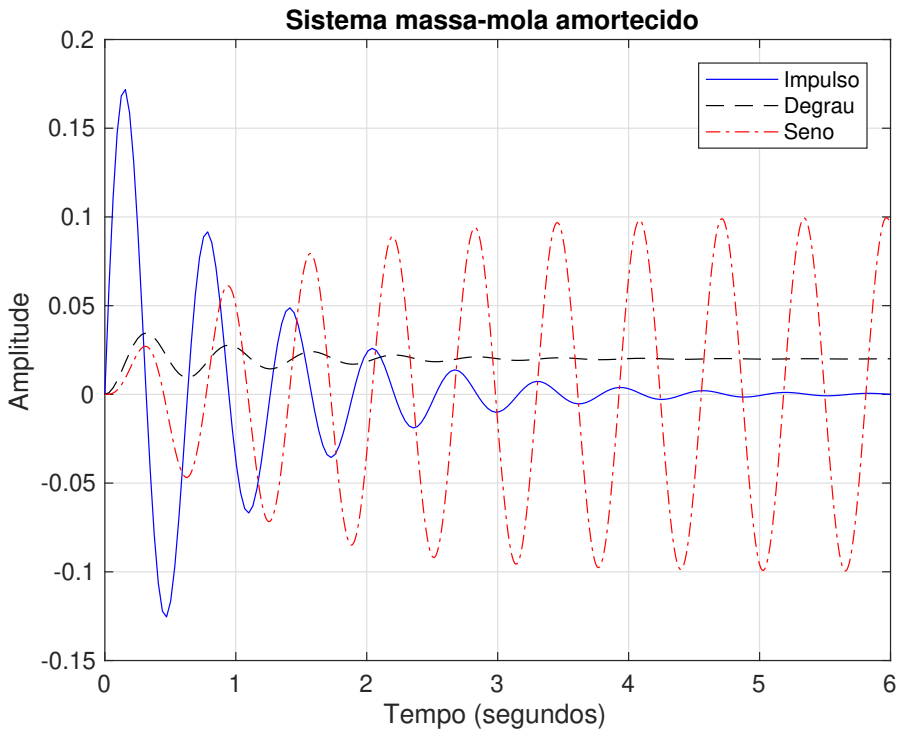
- No Matlab, essa função de transferência é definida com **H=tf([1],[m c k])**
- No Simulink, pode-se simular esse sistema com o seguinte diagrama de blocos:



# Simulação numérica

- Exemplo: Resposta ao impulso, ao degrau e ao seno.

```
% Define a função de transferência
m = 1/2; c = 1; k = 50;
H = tf([1],[m c k])
% Resposta ao impulso (6 segundos)
[y1,t1] = impulse(H,6);
% Resposta ao degrau
[y2,t2] = step(H,6);
% Resposta ao seno em w=10 rad/s
t = 0:0.05:6;
u = sin(10*t);
[y3,t3] = lsim(H,u,t);
% Plota as respostas
plot(t1,y1,'b-',t2,y2,'k--',t3,y3,'r-.'), grid
legend('Impulso','Degrau','Seno')
xlabel('Tempo (segundos)')
ylabel('Amplitude')
title('Sistema massa-mola amortecido')
```




- No Matlab, a resposta ao degrau é obtida com **step(H)**, ao impulso com **impulse(H)** e a uma entrada $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ qualquer com **lsim(H,u,t)**.

# Simulação numérica

- Exemplo. A seguir, são apresentados vários comandos úteis.

```
% O comando zpk() cria uma função de transferência
% a partir dos polos, dos zeros e do ganho do sistema
% Seja H(s) = 20*(s+5)/((s+1)*(s+100));
H = zpk(-5,[-1 -100],20)
% O comando pole() retorna os polos
pole(H)
% O comando zero() retorna os zeros
zero(H)
% O comando damp() retorna: polos, frequência natural e amortecimento
damp(H)
% O comando zpkdata() retorna os polos, os zeros e o ganho de H(s)
[z,p,k] = zpkdata(H)
% O comando tfdata() retorna o numerador e o denominado de H(s)
[num,den] = tfdata(H,'v')
% O comando pzmap() plota a localização dos polos e zeros
pzmap(H)
% O comando dcgain() retorna o ganho DC de H(s)
dcgain(H)
```