EM707 – Controle de Sistemas Mecânicos

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

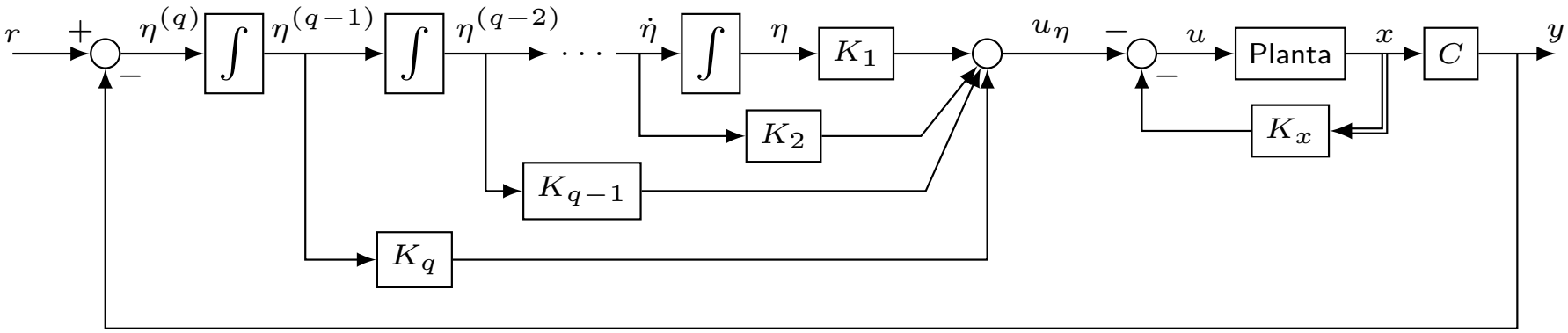
Nota ao leitor

- Estas notas são baseadas principalmente nas referências:
  - K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 4ª edição, Pearson Education do Brasil, 2003.
  - G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Ed., P.-Hall, 2010.
- Material suplementar:
  - R. C. Dorf and R. H. Dorf, *Sistemas de controle Modernos*, 8ª edição, LTC Livros Técnicos e científicos, 2001.
  - J. R. Rowland, *Linear Control Systems: Modeling, analysing, and design*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
  - B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall, 1994.

Projeto de controladores no espaço de estado

Projeto de servomecanismo com uma cadeia de q integradores

- No servomecanismo, é possível incluir uma cadeia de q integradores em série.



- A equação que governa esse sistema é dada por

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \eta^{(q)} = r - y$$
$$y = Cx \qquad u = -u_\eta - K_x x$$

- Para representar os integradores, basta definir o estado $z \in \mathbb{R}^q$ como segue:

$$z_1 = \eta, \qquad z_2 = \dot{\eta}, \qquad \ldots \qquad z_{q-1} = \eta^{(q-2)}, \qquad z_q = \eta^{(q-1)}$$

- Assim, tem-se

$$\dot{z}_1 = z_2 \qquad \dot{z}_2 = z_3, \qquad \cdots$$
$$\dot{z}_{q-1} = z_q \qquad \dot{z}_q = \eta^{(q)} = r - y$$

Projeto de controladores no espaço de estado

Projeto de servomecanismo com uma cadeia de q integradores

- A saída u_η da cadeia de q integradores é dada por

$$\begin{aligned} u_\eta &= K_1\eta + K_2\dot{\eta} + \cdots + K_{q-1}\eta^{q-2} + K_q\eta^{q-1} \\ &= K_1 z_1 + K_2 z_2 + \cdots + K_{q-1} z_{q-1} + K_q z_q \\ &= K_I z \end{aligned}$$

com

$$K_I = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \cdots & K_q \end{bmatrix}$$

- A representação no espaço de estado para a cadeia de integradores fica sendo:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_\eta z + B_\eta (r - y) \\ u_\eta &= K_I z \end{aligned}$$

com o estado z e as matrizes $A_\eta \in \mathbb{R}^{q\times q}$ e $B_\eta \in \mathbb{R}^q$ dadas por

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{q-1} \\ z_q \end{bmatrix}, \qquad A_\eta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_\eta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Projeto de controladores no espaço de estado

Projeto de servomecanismo com uma cadeia de q integradores

- As equações que governam esse sistema passam a ser:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{z} &= A_\eta z + B_\eta (r - Cx)\end{aligned}$$

com as entradas dadas por

$$\begin{aligned}u &= -u_\eta - K_x x \\ u_\eta &= K_I z\end{aligned}$$

- Na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix}\dot{x} \\ \dot{z}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A & 0 \\ -B_\eta C & A_\eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B \\ 0\end{bmatrix} u + \begin{bmatrix}0 \\ B_\eta\end{bmatrix} r$$

com a lei de controle dada por

$$u = -\begin{bmatrix}K_x & K_I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ z\end{bmatrix} = -K\begin{bmatrix}x \\ z\end{bmatrix}$$

- Note que as matrizes têm as seguintes dimensões:

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \quad C \in \mathbb{R}^{1\times n}, \quad A_\eta \in \mathbb{R}^{q\times q}, \quad B_\eta \in \mathbb{R}^{q\times 1}$$

Projeto de controladores no espaço de estado

Projeto de servomecanismo com uma cadeia de q integradores

- Agora basta projetar K de forma que $\bar{A} - \bar{B}K$ seja estável, com $\bar{A}$, $\bar{B}$ e K dados por

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_\eta C & A_\eta \end{bmatrix}, \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad K = \begin{bmatrix} K_x & K_I \end{bmatrix}$$

em que a lei de controle é dada por

$$u = -\begin{bmatrix} K_x & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = -K \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

- Note que o sistema em malha fechada, com $q = \begin{bmatrix} x & z \end{bmatrix}^T$, passa a ser

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} A - BK_x & -BK_I \\ -B_\eta C & A_\eta \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 \\ B_\eta \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} q$$

- A função de transferência da cadeia de q integradores é dada por

$$U_\eta(s) = K_I (sI - A_\eta)^{-1} B_\eta \left[R(s) - Y(s) \right]$$

Projeto de controladores no espaço de estado

Projeto de servomecanismo com uma cadeia de q integradores

- Exemplo: Deseja-se que $G(s)$ siga uma parábola sem erro estacionário:

$$G(s) = \frac{1}{s-5}$$

- Isso claramente pode ser alcançado adicionando-se três integradores em série.

- Uma representação no espaço de estado é dada pelas matrizes:

$$A = 5, \qquad B = 1, \qquad C = 1, \qquad D = 0$$

- As matrizes do modelo de estado da cadeia de $q = 3$ integradores são

$$A_\eta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_\eta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Agora, basta projetar $K = \begin{bmatrix} K_x & K_I \end{bmatrix}$ tal que $\bar{A} - \bar{B}K$ seja estável, com:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_\eta C & A_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Projeto de controladores no espaço de estado

Projeto de servomecanismo com uma cadeia de q integradores

- Escolhendo-se os 4 polos de malha fechada em $s = -1$, a matrix K é dada por:

$$K = \left[\begin{array}{c|c} K_x & K_I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|ccc} 9 & -1 & -4 & -6 \end{array}\right]$$

- A função de transferência da cadeia de q integradores é dada por

$$\frac{U_\eta(s)}{R(s) - Y(s)} = K_I(sI - A_\eta)^{-1}B_\eta = \frac{-6s^2 - 4s - 1}{s^3}$$

- O sistema em malha fechada, com $q = \begin{bmatrix} x & z \end{bmatrix}^T$, passa a ser

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \begin{bmatrix} A - BK_x & -BK_I \\ -B_\eta C & A_\eta \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 \\ B_\eta \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} q \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{6s^2 + 4s + 1}{(s+1)^4}$$

- O erro de rastreamento é dado por

$$E(s) = R(s) - Y(s) = \frac{s^3(s+4)}{(s+1)^4}$$

que claramente fornece um erro estacionário nulo a uma entrada tipo parábola.