

# EM707 – Controle de Sistemas Mecânicos

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica  
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil  
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

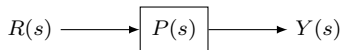
## Nota ao leitor

- ▶ Estas notas são baseadas principalmente nas referências:
  - ▶ K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 4ª edição, Pearson Education do Brasil, 2003.
  - ▶ G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Ed., P.-Hall, 2010.
- ▶ Material suplementar:
  - ▶ R. C. Dorf and R. H. Dorf, *Sistemas de controle Modernos*, 8ª edição, LTC Livros Técnicos e científicos, 2001.
  - ▶ J. R. Rowland, *Linear Control Systems: Modeling, analysing, and design*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
  - ▶ B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall, 1994.

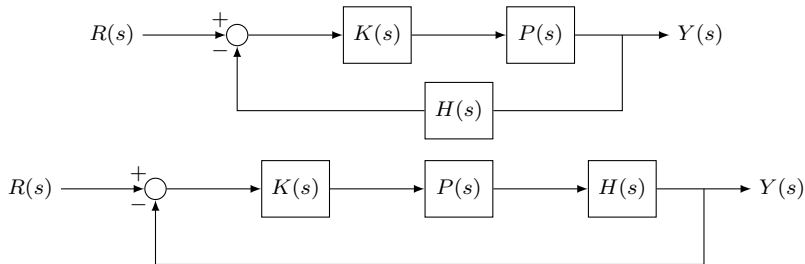
# Lugar das raízes (Root Locus)

## Conceitos básicos

- ▶ Sistemas físicos, mecânicos e elétricos, podem ser representados por uma função de transferência  $P(s)$  em “malha aberta”.



- ▶ Geralmente, deseja-se estabilidade e desempenho (respostas transitórias e permanentes) que não são possíveis no sistema em malha aberta.
- ▶ Portanto, faz-se necessário um projeto de controlador por realimentação (feedback).
- ▶ A figura abaixo apresenta diferentes diagramas de controle em malha fechada.



# Lugar das raízes (Root Locus)

## Conceitos básicos

- ▶ Todos esses diagramas possuem a mesma equação característica, dada por

$$1 + K(s)P(s)H(s) = 0$$

$$1 + K(s)F(s) = 0, \quad F(s) = P(s)H(s)$$

- ▶ No entanto, as funções de transferência em malha fechada são diferentes.
- ▶ A forma mais simples do controlador é um **ganho estático**  $K(s) = K$ .
- ▶ Note que se um controlador  $K(s)$  tiver a forma

$$K(s) = K \frac{s + b}{s + a}$$

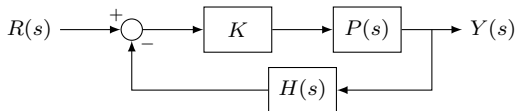
com  $a$  e  $b$  conhecidos, pode-se incluir o termo  $\frac{(s+b)}{(s+a)}$  dentro de  $F(s)$ .

- ▶ A estabilidade e o desempenho do sistema em malha fechada dependem de seus polos, ou seja, das raízes da equação característica.
- ▶ Assim, é importante conhecer onde essas raízes (os polos) se localizam no plano complexo em função do ganho do controlador  $K$ .
- ▶ Essa é a motivação para o root locus (lugar das raízes).

# Lugar das raízes (Root Locus)

## Análise do lugar das raízes

- ▶ O root locus fornecerá para o sistema abaixo o gráfico dos polos em função de  $K$ .



- ▶ Em malha fechada, tem-se

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KP(s)}{1 + KP(s)H(s)}$$

- ▶ A equação característica que fornece a localização dos polos em malha fechada é:

$$1 + KF(s) = 0, \quad F(s) = P(s)H(s)$$

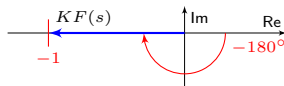
- ▶ Essa equação pode ser reescrita como

$$KF(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} = -1$$

- ▶ Note que essa equação tem que satisfazer:

$$|KF(s)| = 1$$

$$\angle KF(s) = \pm 180^\circ(2n + 1), \quad n = 0, 1, \dots$$



# Lugar das raízes (Root Locus)

## Análise do lugar das raízes

- Para um dado  $s = \bar{s}$ , pode-se reescrever  $F(\bar{s})$  como

$$\begin{aligned} F(\bar{s}) &= \frac{\bar{z}_1 e^{i\phi_1} \bar{z}_2 e^{i\phi_2} \cdots \bar{z}_m e^{i\phi_m}}{\bar{p}_1 e^{i\theta_1} \bar{p}_2 e^{i\theta_2} \cdots \bar{p}_n e^{i\theta_n}} \\ &= \frac{\bar{z}_1 \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_m}{\bar{p}_1 \bar{p}_2 \cdots \bar{p}_n} \frac{e^{i(\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_m)}}{e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)}} \\ &= \frac{\bar{z}_1 \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_m}{\bar{p}_1 \bar{p}_2 \cdots \bar{p}_n} e^{i(\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_m - \theta_1 - \theta_2 - \cdots - \theta_n)} \end{aligned}$$

- Assim,  $F(\bar{s})$  é dado por

$$F(\bar{s}) = |F(\bar{s})| e^{i\alpha}$$

com

$$|F(\bar{s})| = \frac{\bar{z}_1 \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_m}{\bar{p}_1 \bar{p}_2 \cdots \bar{p}_n}$$

e

$$\alpha = \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_m - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)$$

calculado entre  $[0, 360^\circ)$  no sentido anti-horário.

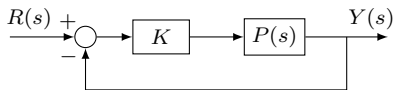
- Portanto, se o ponto de teste  $\bar{s}$  pertence ao lugar das raízes, então:

$$|KF(\bar{s})| = K \frac{\bar{z}_1 \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_m}{\bar{p}_1 \bar{p}_2 \cdots \bar{p}_n} = 1 \quad \text{e} \quad \alpha = \pm 180^\circ (2n + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

# Lugar das raízes (Root Locus)

## Análise do lugar das raízes

- **Exemplo:** Considere o sistema abaixo com  $P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ .



- Sua equação característica é

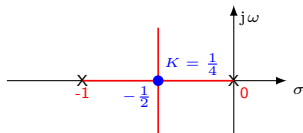
$$1 + KP(s) = 0$$

ou seja

$$1 + K \frac{1}{s(s+1)} = 0 \Rightarrow s^2 + s + K = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4K}}{2}$$

- Para  $0 \leq K \leq 1/4$  as raízes são reais:

- Se  $K = 0$ , tem-se  $s = 0$  e  $s = -1$ .
- Se  $K = 1/4$ , tem-se  $s_{1,2} = -1/2$ .



- Para  $K \geq 1/4$ , tem-se  $s_{1,2} = -1/2(1 \pm j\sqrt{4K-1})$ .

# Lugar das raízes (Root Locus)

## Análise do lugar das raízes

- **Exemplo:** Suponha que  $F(s)$  seja dada por

$$F(s) = P(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

cujos polos estão localizados em  $s = 0$ ,  $s = -1$  e  $s = -2$ .

- A equação característica desse sistema é dada por

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

- A condição de ângulo fornece

$$\begin{aligned}\angle KF(s) &= \angle \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \\ &= -\angle s - \angle(s+1) - \angle(s+2) \\ &= \pm 180^\circ(2n+1)\end{aligned}$$

- E a condição de módulo (com  $K > 0$ ) fornece

$$\frac{K}{|s||s+1||s+2|} = 1$$



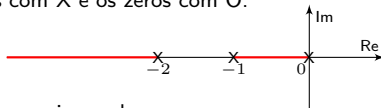
# Lugar das raízes (Root Locus)

## Análise do lugar das raízes

- ▶ A seguir serão apresentados os passos para fazer o esboço do root locus de:

$$F(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

1. Marque no plano  $s$  os polos com X e os zeros com O.



2. Determine o lugar das raízes no eixo real.

- ▶ Seja o ponto de teste  $s$  no eixo real positivo ( $s > 0$ ), então

$$\angle s = \angle(s+1) = \angle(s+2) = 0^\circ$$

e a condição de ângulo não pode ser satisfeita.

- ▶ Para  $s$  entre -1 e 0, tem-se

$$\angle s = -180^\circ, \quad \text{e} \quad \angle(s+1) = \angle(s+2) = 0^\circ$$

Nesse caso, a condição de ângulo pode ser satisfeita nesse caso.

- ▶ Para  $s$  entre -2 e -1, tem-se

$$\angle s = -180^\circ, \quad \angle(s+1) = -180^\circ \quad \text{e} \quad \angle(s+2) = 0^\circ$$

Portanto, a condição de ângulo não pode ser satisfeita.

- ▶ Para  $s < -2$ , tem-se

$$\angle s = -180^\circ, \quad \angle(s+1) = -180^\circ \quad \text{e} \quad \angle(s+2) = -180^\circ$$

Assim, a condição de ângulo pode ser satisfeita.

# Lugar das raízes (Root Locus)

## Análise do lugar das raízes

3. Determine as assíntotas do lugar das raízes quando  $|s| \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} KF(s) = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{K}{s^3}$$

Para  $K/s^3$ , a condição de ângulo é  $-3\angle s = \pm 180^\circ(2n+1)$

Assim, o ângulo das assíntotas é  $\pm 60^\circ(2n+1)$ , que fornece:  $60^\circ, -60^\circ, 180^\circ$ .

4. Se o ponto  $s$  estiver no eixo real afastado da origem, então

$$KF(s) \approx \frac{K}{(s+1)^3}$$

A condição de ângulo fornece

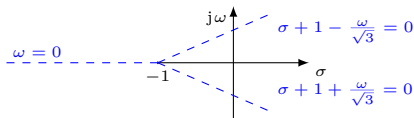
$$-3\angle(s+1) = \pm 180^\circ(2n+1) \quad \Rightarrow \quad \angle(s+1) = \pm 60^\circ(2n+1)$$

Fazendo  $s = \sigma + j\omega$ , tem-se

$$\angle(\sigma + j\omega + 1) = \pm 60^\circ(2n+1) \quad \Rightarrow \quad \tan^{-1} \left( \frac{\omega}{\sigma + 1} \right) = \pm 60(2n+1) = 60, -60, 180$$

ou seja

$$\frac{\omega}{\sigma + 1} = \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0$$



# Lugar das raízes (Root Locus)

## Análise do lugar das raízes

5. Ponto de partida no eixo real. Reescreva a equação característica como

$$\Gamma(s) = 1 + KF(s) = 1 + K \frac{n(s)}{d(s)} = 0 \quad \Rightarrow \quad K = -\frac{d(s)}{n(s)}$$

Agora, derivando a equação característica, tem-se

$$\frac{d\Gamma(s)}{ds} = KF'(s) = K \frac{n'(s)d(s) - d'(s)n(s)}{d^2(s)} = 0$$

Assim:

$$n'(s)d(s) - d'(s)n(s) = 0$$

Porém, note que

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{d'(s)n(s) - n'(s)d(s)}{n^2(s)} = 0 \quad \Rightarrow \quad n'(s)d(s) - d'(s)n(s) = 0$$

Portanto,  $\frac{dK}{ds}$  pode ser usado para se determinar as raízes de  $\frac{d\Gamma(s)}{ds}$ .

Perceba agora que no ponto de partida  $s = s_1$ , no eixo real, a equação característica  $\Gamma(s)$  deve conter raízes múltiplas reais de ordem  $r > 1$ , então  $\Gamma(s)$  tem a forma:

$$\Gamma(s) = (s - s_1)^r (s - s_2) \cdots (s - s_n) \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{d\Gamma(s)}{ds} \right|_{s=s_1} = 0$$

Assim, o ponto de partida  $s = s_1$  pode ser determinado calculando-se as raízes de

$$\left. \frac{dK}{ds} \right|_{s=s_1} = 0 \quad \text{com} \quad K = -d(s)/n(s)$$

# Lugar das raízes (Root Locus)

## Análise do lugar das raízes

Para o nosso exemplo

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0 \rightarrow K = -(s^3 + 3s^2 + 2s)$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \rightarrow -3s^2 - 6s - 2 = 0 \rightarrow s = \begin{cases} -0.4226 \\ -1.5774 \end{cases}$$

Como não existe root locus entre  $(-2, -1)$ , o ponto de partida é em  $s = -0.4226$ .

6. Cruzamento com o eixo imaginário. Usando o critério de Routh

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

$$\begin{array}{rcl} s^3 : & 1 & 2 \\ s^2 : & 3 & K \\ s^1 : & (6 - K)/3 & \\ s^0 : & K & \end{array}$$

Portanto, as raízes estarão no eixo imaginário se  $K = 6$ .

Usando o polinômio auxiliar, com  $K = 6$ , tem-se

$$3s^2 + K = 3s^2 + 6 = 0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{2}$$

Portanto  $\omega = \pm\sqrt{2}$  em  $K = 6$ .

Observação: Pode-se também fazer  $s = j\omega$  na equação característica

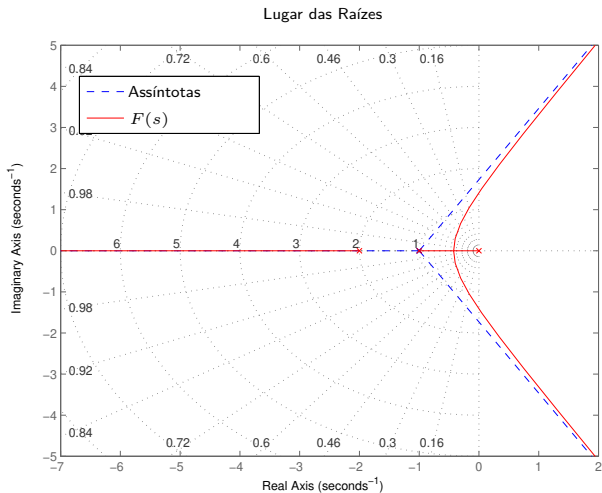
$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + K = 0 \rightarrow (K - 3\omega^2) + j(2\omega - \omega^3) = 0$$

Portanto,  $K - 3\omega^2 = 0$  e  $2\omega - \omega^3 = 0$ , ou seja,  $\omega = \pm\sqrt{2}$ ,  $K = 6$  ou  $\omega = 0$ ,  $K = 0$ .

# Lugar das raízes (Root Locus)

## Análise do lugar das raízes

- A figura abaixo apresenta o lugar das raízes de  $F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$ .



- **Observação:** No Matlab, esse gráfico é obtido com o comando **rlocus(F)**.

# Lugar das raízes (Root Locus)

## Análise do lugar das raízes

► **Exemplo:** Para  $K = 1$  e  $P(s) = \frac{1}{s(s+c)}$ , esboce o root locus com relação a  $c > 0$ .

► A equação característica é dada por

$$1 + P(s) = 0 \Rightarrow s^2 + cs + 1 = 0 \Rightarrow 1 + c \frac{s}{s^2 + 1} = 0$$

ou seja

$$1 + cF(s) = 0, \quad F(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

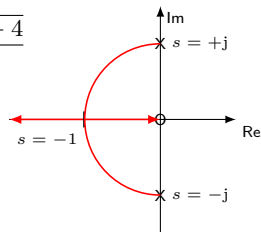
► Note que  $F(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)}$  tem zeros em  $s = 0$  e  $s = \infty$  e polos em  $s = \pm j$ .

► As raízes da equação característica são

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4}}{2}$$

Portanto:

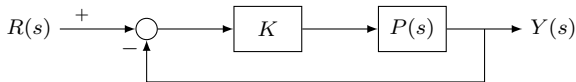
- para  $c = 0$ , tem-se  $s_{1,2} = \pm j$ ;
- para  $c = 2$ , tem-se  $s_{1,2} = -1$ ;
- para  $c \gg 0$ , tem-se  $s \rightarrow 0$  e  $s \rightarrow -c$ .



# Lugar das raízes (Root Locus)

## Análise do lugar das raízes

- ▶ É possível fazer o **root locus negativo** (ou seja, para  $K < 0$ ) no diagrama abaixo.



- ▶ Basta notar que o root locus de  $P(s)$  para valores negativos de  $K$  é equivalente ao root locus positivo (para  $K > 0$ ) da planta  $-P(s)$ , ou seja:

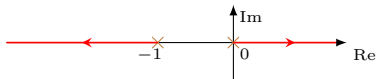
$$1 + KP(s) = 0, \text{ para } K < 0 \iff 1 + K\bar{P}(s) = 0, \text{ para } K > 0 \text{ e } \bar{P} = -P$$

- ▶ **Exemplo:** Suponha que se deseje fazer o root locus negativo de  $P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ .

- ▶ Assim, a equação característica com  $K > 0$  para a planta  $-P(s)$  é dada por

$$1 + K \frac{-1}{s(s+1)} = 0 \Rightarrow s^2 + s - K = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1+4K}}{2}$$

- ▶ Fornecendo o root locus apresentado na figura abaixo.



# Lugar das raízes (Root Locus)

## Regras para fazer o gráfico do Root Locus

- ▶ A equação característica  $\Gamma(s) := d(s) + Kn(s) = 0$  é dada por

$$1 + K \frac{n(s)}{d(s)} = 1 + K \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = 1 + K \frac{(s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)} = 0$$

- ▶ Note que  $-a_1 = \sum p_i$  e  $-b_1 = \sum z_i$ .

- ▶ Os passos para fazer o esboço do root locus são:

1. Marque os polos com X e os zeros com O.

2. Desenhe o root locus no eixo real.

3. Desenhe as assíntotas, centradas em  $\alpha$ , com ângulos  $\phi_l$ , em que:

- ▶  $n - m$  é o número de assíntotas;

- ▶  $\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m} = \frac{-a_1 + b_1}{n - m};$

- ▶  $\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ (l-1)}{n - m}, l = 1, 2, \dots, n - m.$

4. Determine os pontos  $s_i$  de partida do eixo real ou de chegada no eixo real usando

$$\left. \frac{dK}{ds} \right|_{s=s_i} = 0 \quad \text{com} \quad K = -d(s)/n(s)$$



# Lugar das raízes (Root Locus)

## Regras para fazer o gráfico do Root Locus

5. Calcule os ângulos  $\theta_p$  de partida dos polos

$$q \theta_p = \sum \phi_i - \sum \theta_i - 180^\circ - 360^\circ l$$

em que

- ▶  $q$  é a multiplicidade do polo;
- ▶  $l$  é um inteiro tal que o ângulo esteja entre  $-180^\circ$  e  $180^\circ$ ;
- ▶  $\sum \theta_i$  é a soma dos ângulos dos polos remanescentes;
- ▶  $\sum \phi_i$  é a soma dos ângulos de todos os zeros.

6. Calcule os ângulos  $\phi_z$  de chegada nos zeros

$$q \phi_z = \sum \theta_i - \sum \phi_i + 180^\circ + 360^\circ l$$

em que

- ▶  $q$  é a multiplicidade do zero;
- ▶  $l$  é um inteiro tal que o ângulo esteja entre  $-180^\circ$  e  $180^\circ$ ;
- ▶  $\sum \theta_i$  é a soma dos ângulos de todos os polos;
- ▶  $\sum \phi_i$  é a soma dos ângulos dos zeros remanescentes.

7. Calcule os pontos onde o root locus cruza o eixo imaginário usando:

- ▶ o critério de Routh;
- ▶ ou resolvendo a equação característica para  $s = j\omega$ .

# Lugar das raízes (Root Locus)

Regras para fazer o gráfico do Root Locus

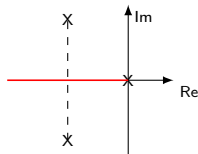
**Exemplo:** Seja a planta dada por

$$P(s) = \frac{1}{s((s+4)^2 + 16)}$$

cujos polos estão em  $s = 0$  e  $s_{1,2} = -4 \pm 4j$ .

## 1. Root Locus no eixo real.

- ▶ O ângulo dos polos (zeros) complexos se cancelam.
- ▶ Portanto, para um ponto de teste  $s_0 \geq 0$ , no eixo real, o ângulo é  $0^\circ$ .
- ▶ Para  $s_0 < 0$ , o ângulo é  $+180^\circ$ , que satisfaz a condição de ângulo.



## 2. Determinar as assíntotas para valores grandes de $K \rightarrow \infty$ .

- ▶ Note que  $1 + KP(s) = 0 \rightarrow P(s) = -\frac{1}{K}$ .
- ▶ Assim  $K \rightarrow \infty$  implica que  $P(s) \rightarrow 0$ .
- ▶ Isso pode ocorrer de duas formas:

# Lugar das raízes (Root Locus)

## Regras para fazer o gráfico do Root Locus

2.1 Primeiro, como  $P(s) = n(s)/d(s)$ , tem-se que  $P(s) \rightarrow 0$  implica que  $n(s) \rightarrow 0$ . Portanto, para  $K \gg 1$  as raízes de  $1 + KP(s)$  tenderão aos zeros de  $P(s)$ .

2.2 Segundo, note que

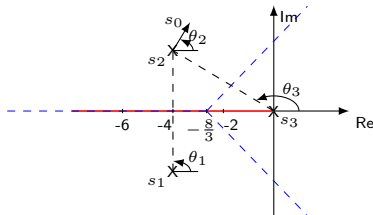
$$1 + K \frac{n(s)}{d(s)} = 0 \rightarrow 1 + K \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = 0$$

Assumindo  $n > m$ , tem-se que para valores grandes de  $s$ , as potências de ordem maiores em  $s$  predominam, permitindo fazer a seguinte aproximação:

$$1 + K \frac{1}{(s - \alpha)^{n-m}} = 0$$

Basta agora determinar as assíntotas, centradas em  $\alpha$  com ângulos  $\phi_l$ , em que  $n - m$  é o número de assíntotas;  $\alpha = \frac{-a_1 + b_1}{n - m}$ ; e  $\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ(l-1)}{n - m}$ .

Para o nosso exemplo, tem-se  $n - m = 3$ ,  $\alpha = -8/3 = -2.67$  e  $\phi_l = 60^\circ, -60^\circ, 180^\circ$ .



# Lugar das raízes (Root Locus)

Regras para fazer o gráfico do Root Locus

## 3. Ângulos de chegada e de partida.

Escolhe-se um ponto de teste próximo do polo  $s_2$  de tal forma que os ângulos não variem. Assim

$$-90^\circ - \theta_2 - 135^\circ = 180^\circ + 360^\circ l$$

em que  $l$  é selecionado de forma a fornecer  $-180^\circ < \theta_2 < 180^\circ$ .

Com  $l = -1$ , tem-se  $-\theta_2 = 90^\circ + 135^\circ + 180^\circ - 360^\circ$ , ou seja  $\theta_2 = -45^\circ$ .

## 4. Ponto de cruzamento com o eixo imaginário

$$1 + \frac{K}{s((s+4)^2 + 16)} = 0 \rightarrow s^3 + 8s^2 + 32s + K = 0$$

Fazendo  $s = j\omega$ , tem-se

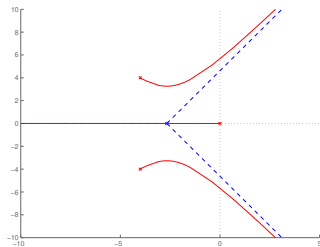
$$(j\omega)^3 + 8(j\omega)^2 + 32j\omega + K = 0$$

$$-j\omega^3 - 8\omega^2 + 32j\omega + K = 0$$

Portanto

$$-8\omega^2 + K = 0 \rightarrow K = 8\omega^2 = 256$$

$$-j\omega^3 + 32j\omega = 0 \rightarrow \omega = 0, \underline{\omega = \sqrt{32}}$$



# Projeto de controladores usando o lugar das raízes

## Compensador estático

- ▶ O objetivo do projeto é selecionar um **ganho estático**  $K$  a partir do root locus.
- ▶ A equação característica  $1 + KP(s) = 0$  fornece as condições:

$$|KP(s)| = 1$$

$$\angle KP(s) = \pm 180^\circ(2n + 1), \quad n = 0, 1, \dots$$

- ▶ Portanto, para um específico ponto  $s_0$  no root locus, o ganho é dado por

$$K = \frac{1}{|P(s_0)|}$$

- ▶ **Exemplo:** Suponha que a planta  $P(s)$  seja dada por

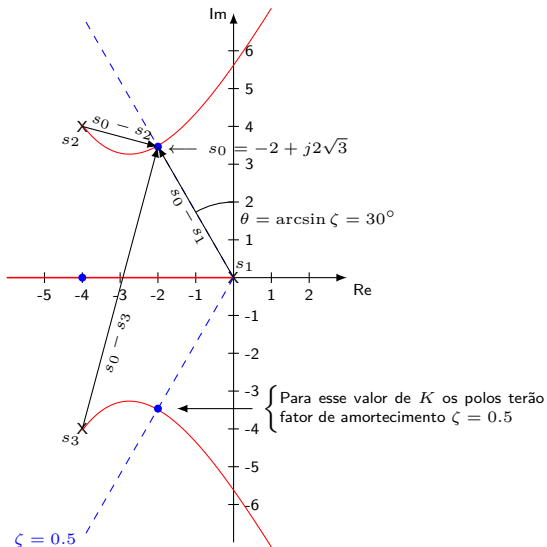
$$P(s) = \frac{1}{s((s + 4)^2 + 16)}$$

cujos polos estão localizados em  $s = 0$  e  $s_{1,2} = -4 \pm 4j$ .

- ▶ O objetivo do projeto é determinar o valor do ganho  $K$  de forma que os polos dominantes do sistema em malha fechada tenham fator de amortecimento  $\zeta = 0.5$ .
- ▶ O gráfico do root locus, que foi anteriormente derivado e que será utilizado para o projeto, está apresentado na próxima página.

# Projeto de controladores usando o lugar das raízes

## Compensador estático



# Projeto de controladores usando o lugar das raízes

## Compensador estático

- ▶ O valor do ganho no ponto desejado  $s_0$  será dado por  $K = \frac{1}{|P(s_0)|}$
- ▶ Algebricamente, tem-se  $P(s_0) = \frac{1}{s_0(s_0 - s_2)(s_0 - s_3)}$
- ▶ Portanto,  $K = \frac{1}{|P(s_0)|} = |s_0||s_0 - s_2||s_0 - s_3|$
- ▶ Assim, pode-se calcular o ganho  $K$  necessário para alocar as raízes no ponto  $s = s_0$ , medindo o comprimento dos respectivos vetores e multiplicando-os.
- ▶ Usando uma figura com escala, tem-se:

$$|s_0| \approx 4.0, \quad |s_0 - s_2| \approx 2.1, \quad |s_0 - s_3| \approx 7.6$$

- ▶ Portanto o ganho é estimado como sendo  $K = 4.0 \times 2.1 \times 7.6 \approx 64$ .
- ▶ Note que o sistema é do tipo 1 e terá assim uma constante de velocidade:

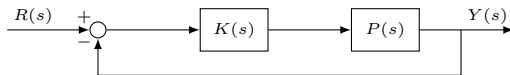
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sKP(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s64}{s((s+4)^2 + 16)} = \frac{64}{32} = 2$$

- ▶ Se for desejado um  $K_v$  maior, ou ainda que o erro estacionário seja zero, esse compensador estático  $K$  não será suficiente.

# Projeto de controladores usando o lugar das raízes

## Compensador dinâmico

- ▶ O objetivo é projetar usando o root-locus o **compensador dinâmico**  $K(s)$ .



- ▶ O compensador  $K(s) = K \frac{s + z}{s + p}$  é chamado de:
  1. compensador em avanço de fase se  $z < p$  (zero se encontra à direita do polo);
  2. compensador em atraso de fase se  $z > p$  (zero se encontra à esquerda do polo).
- ▶ A terminologia avanço/atraso deve-se ao fato que, para  $s = +j\omega$ , a fase de

$$K(s) = K \frac{s + z}{s + p} \quad \text{é} \quad \phi = \arctan2(\omega, z) - \arctan2(\omega, p)$$

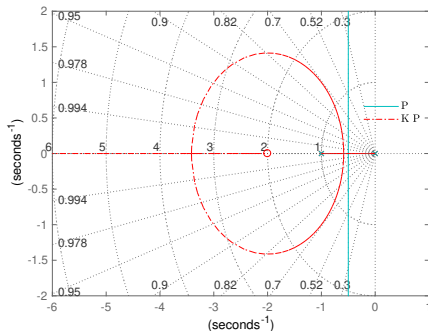
- ▶ Portanto, se  $z < p$ , então  $\phi$  é positivo, o que indica um avanço de fase.
- ▶ Uma outra notação possível é dada por  $K(s) = K\alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K \frac{s + 1/T}{s + 1/(\alpha T)}$
- ▶ Note a relação entre  $z$ ,  $p$ , e  $\alpha$  dada por:  $z = 1/T$ ,  $p = 1/(\alpha T)$  e  $z = \alpha p$ .
- ▶ Para o compensador estável (em que  $p > 0$ ):
  1. se  $\alpha < 1$ , tem-se uma compensação por avanço de fase;
  2. se  $\alpha > 1$ , tem-se uma compensação por atraso de fase.



# Projeto de controladores usando o lugar das raízes

## Compensador dinâmico: avanço de fase

- ▶ A seguir é apresentado o efeito de uma compensação em **avanço de fase**.
- ▶ Suponha que a planta seja dada por  $P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$  e que o compensador projetado tenha sido  $K(s) = K(s+2)$ .
- ▶ A figura abaixo apresenta o root locus do sistema com e sem compensação.



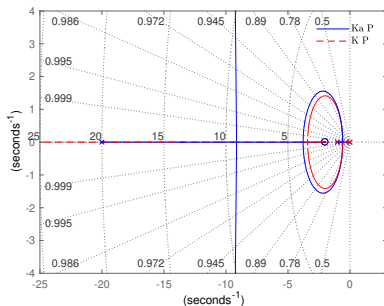
- ▶ Percebe-se que com esse compensador é possível obter  $\zeta \geq 0.5$  com  $\omega_n \geq 2$ .

# Projeto de controladores usando o lugar das raízes

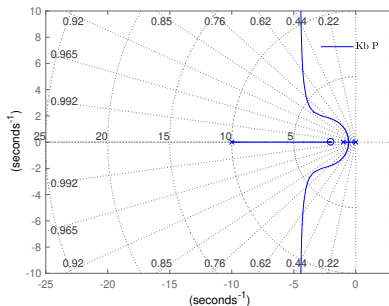
Compensador dinâmico: avanço de fase

- Fisicamente é impossível ter um derivador puro  $K(s) = K(s + 2)$ .
- Uma opção é alterar  $K(s)$  para os seguintes compensadores em avanço de fase:

a)  $K_a(s) = K \frac{(s + 2)}{(s + 20)}$



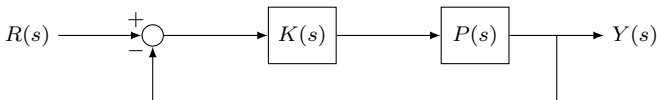
b)  $K_b(s) = K \frac{(s + 2)}{(s + 10)}$



# Projeto de controladores usando o lugar das raízes

Compensador dinâmico: avanço de fase

- **Exemplo:** Considere o diagrama de controle abaixo em que  $P(s) = \frac{4}{s(s+2)}$ .



- Considerando um ganho estático  $K(s) = 1$ , o sistema em malha fechada é dado por

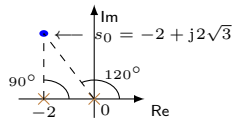
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4} = \frac{4}{(s + 1 + j\sqrt{3})(s + 1 - j\sqrt{3})}$$

cujos polos, localizados em  $s = -1 \pm j\sqrt{3}$ , fornecem  $\zeta = 0.5$  e  $\omega_n = 2$  rad/s.

- Suponha agora, que se deseje modificar os polos de malha fechada usando um compensador por **avanço de fase** de forma a obter  $\omega_n = 4$  rad/s e  $\zeta = 0.5$ .

- Para  $\omega_n = 4$  e  $\zeta = 0.5$ , os polos estão em

$$s_0 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = -2 \pm j2\sqrt{3}$$



- **Observações:** Os comandos **freqresp()** e **evalfr()** podem ser utilizados para se calcular  $H(s_0)$ . Já o ângulo, pode ser obtido com os comandos **phase()** e **angle()**.

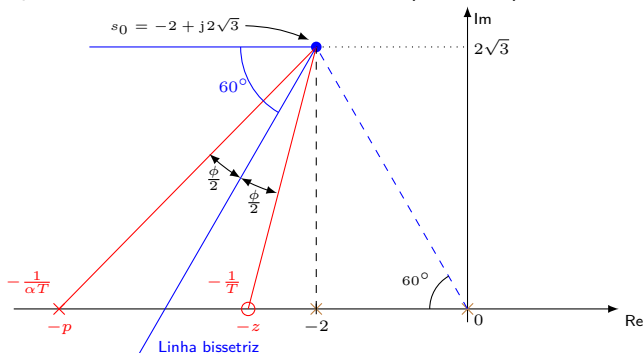
# Projeto de controladores usando o lugar das raízes

## Compensador dinâmico: avanço de fase

- ▶ No ponto  $s = s_0$ , o ângulo de  $P(s)$  é dado por

$$\angle P(s)|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = -90^\circ - 120^\circ = -210^\circ$$

- ▶ Portanto, é necessário acrescentar um avanço de  $\phi = 30^\circ$  para se obter  $-180^\circ$ .
- ▶ Há várias opções possíveis para a escolha do polo (e do zero) do compensador.



- ▶ Usando a linha bissetriz, tem-se que  $z = 2.928$  e  $p = 5.464$  são obtidos de

$$(-2) - (-z) = 2\sqrt{3}\tan(15^\circ) \quad \text{e} \quad (-2) - (-p) = 2\sqrt{3}\tan(45^\circ)$$

# Projeto de controladores usando o lugar das raízes

## Compensador dinâmico: avanço de fase

► Isso coloca o zero do compensador em  $s = -2.9$  e polo em  $s = -5.4$ .

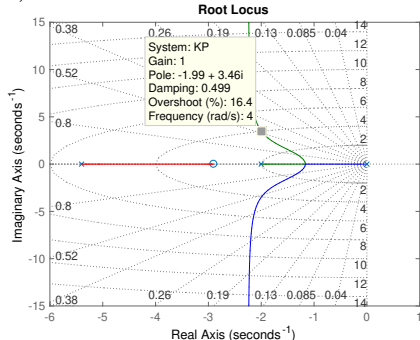
► O controlador fica sendo  $K(s) = K \frac{(s + 2.9)}{(s + 5.4)}$ .

► Função de transferência do ramo direto:

$$K(s)P(s) = \frac{4K(s + 2.9)}{s(s + 2)(s + 5.4)}$$

► Ganho  $K$  é obtido da condição de módulo

$$\left| \frac{4K(s + 2.9)}{s(s + 2)(s + 5.4)} \right|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = 1$$
$$\Rightarrow K = 4.68$$



► **Observação:** Note que esse controlador pode ser descrito na forma equivalente:

$$K(s) = K \frac{s + 1/T}{s + 1/(\alpha T)}$$

em que

$$1/T = 2.9 \rightarrow T = 0.345, \quad \text{e} \quad \alpha T = 1/5.4 = 0.185 \rightarrow \alpha = 0.537$$

# Projeto de controladores usando o lugar das raízes

Compensador dinâmico: avanço de fase

- ▶ **Exemplo:** Encontre um compensador por **avanço de fase** para a planta

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

tal que em malha fechada, tenha-se  $\zeta = 0.5$  e  $\omega_n = 2$  rad/s.

- ▶ Para esses valores de  $\zeta$  e  $\omega_n$ , tem-se  $s_0 = -1 + j\sqrt{3}$ .

- ▶ Para esse ponto, o ângulo é dado por:

$$\begin{aligned}\angle P(s)\big|_{s=s_0} &= [-\angle s - \angle(s+1)]_{s=s_0} = -\angle(-1 + j\sqrt{3}) - \angle(j\sqrt{3}) \\ &= -120^\circ - 90^\circ = -210^\circ\end{aligned}$$

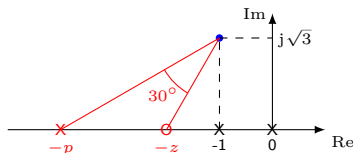
- ▶ Assim, será necessário adicionar  $30^\circ$ , ou seja,  $\angle K(s_0) = 30^\circ$ .

- ▶ Como  $K(s) = K \frac{s+z}{s+p}$ , tem-se que  $\phi - \theta = 30^\circ$ , em que  $\phi$  é o ângulo gerado pelo zero em  $s = -z$  e  $\theta$  é o ângulo gerado pelo polo em  $s = -p$ .

- ▶ Assim:  $\angle K(s) = [\angle(s+z) - \angle(s+p)]_{s=-1+j\sqrt{3}} = 30^\circ$ .

# Projeto de controladores usando o lugar das raízes

Compensador dinâmico: avanço de fase



- ▶ Se o zero do compensador for escolhido arbitrariamente como sendo  $z = 2$ , então o polo do compensador  $p$  deverá satisfazer:

$$\angle(z - 1 + j\sqrt{3}) - \angle(p - 1 + j\sqrt{3}) = 30^\circ \Rightarrow 60^\circ - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{p-1}\right) = 30^\circ$$

- ▶ Portanto:  $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{p-1}\right) = 30^\circ \Rightarrow \sqrt{3} = (p-1)\sqrt{3}/3 \Rightarrow p = 4$

- ▶ A condição de ganho fornece:  $\left| K \frac{(s+2)}{(s+4)} \frac{1}{s(s+1)} \right|_{s=-1+j\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow K = 6$

- ▶ O compensador é dado por  $K(s) = 6 \frac{(s+2)}{(s+4)} = 3 \frac{(0.5s+1)}{(0.25s+1)}$

- ▶ **Observação:** O maior ganho estático é obtido escolhendo-se  $z$ , o zero de  $K(s)$ , de forma a fornecer totalmente o ângulo requerido. Isso implica que  $p \rightarrow \infty$ .

# Projeto de controladores usando o lugar das raízes

Compensador dinâmico: avanço de fase

► **Exemplo:** Suponha que a planta seja dada por  $P(s) = \frac{1}{s^2}$ .

► As especificações de desempenho desejadas são:

$$t_s \leq 4s \text{ a } 2\% \quad \text{e} \quad M_p \leq 35\%$$

► Portanto:

$$\zeta^2 \geq \frac{\ln(M_p)^2}{\pi^2 + \ln(M_p)^2} \Rightarrow \zeta \geq 0,32$$

$$t_s \leq 4s \Rightarrow \frac{4}{\zeta \omega_n} \leq 4 \Rightarrow \zeta \omega_n \geq 1$$

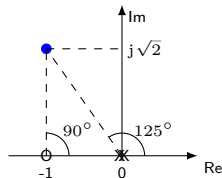
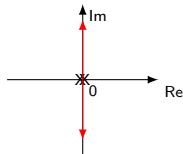
► Uma opção é escolher os polos dominantes em  $s_0 = -1 \pm j\sqrt{2}$ , que fornece:

$$\zeta = \sqrt{3}/3 \approx 0.577 \quad \text{e} \quad \omega_n = \sqrt{3} \approx 1.733$$

► Nesse ponto  $s_0$ , o ângulo de  $P(s)$  é dado por

$$\angle P(s) \Big|_{s=-1+j\sqrt{2}} = -2 \times 125^\circ = -250^\circ$$

► Uma **escolha simples** para alocar o zero de  $K(s)$  é diretamente abaixo de  $s_0$ , fazendo  $z = 1$ , o que fornecerá  $+90^\circ$ .

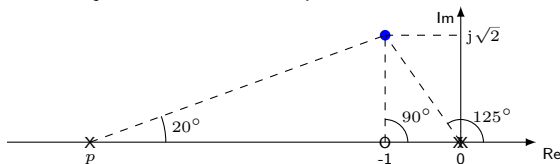




# Projeto de controladores usando o lugar das raízes

## Compensador dinâmico: avanço de fase

- ▶ Como  $P(s)$ , em  $s = s_0$ , fornece  $-250^\circ$ , o compensador  $K(s)$  deve adicionar  $70^\circ$ .
- ▶ Como o zero em  $z = 1$  já adiciona  $+90^\circ$ , o polo deverá adicionar  $-20^\circ$ .



- ▶ Denotando por  $x$  a distância entre o ponto  $-1$  e o ponto  $p$ , tem-se

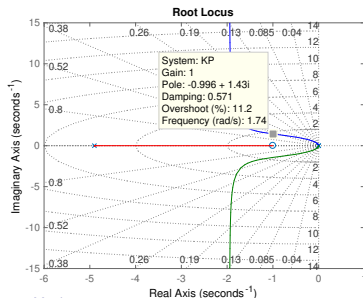
$$\tan 20^\circ = \frac{\sqrt{2}}{x} \rightarrow x = 3.9 \rightarrow p = -4.9$$

- ▶ Assim, o compensador fica sendo:

$$K(s) = K \frac{(s + 1)}{(s + 4.9)}$$

- ▶ A condição de módulo fornece

$$\left| K \frac{(s + 1)}{s^2(s + 4.9)} \right|_{s=-1+j\sqrt{2}} = 1$$
$$\rightarrow K = 8.8$$



# Projeto de controladores usando o lugar das raízes

## Compensador dinâmico: atraso de fase

- ▶ A seguir é apresentado o efeito de uma compensação por **atraso de fase**:

$$K(s) = \frac{s + z}{s + p}, \quad z > p$$

- ▶ Esse compensador é geralmente utilizado para aumentar  $K_v$ .

- ▶ **Exemplo:** Suponha que o compensador por avanço de fase dado por  $K_1(s) = 31 \frac{(s + 2)}{(s + 20)}$  tenha sido projetado para a planta  $P(s) = \frac{1}{s(s + 1)}$ .

- ▶ Esse compensador fornece um polo  $s_0$  com  $\zeta = 0.705$  e  $\omega_n = 1.835$  rad/s.

- ▶ Usando esse compensador  $K_1$ , a constante de velocidade é dada por

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s K_1(s) P(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s 31 \frac{(s + 2)}{(s + 20)} \frac{1}{s(s + 1)} = \frac{31}{10} = 3.1$$

- ▶ Agora, adicionando o compensador por atraso de fase, dado por

$$K_2(s) = \frac{(s + 0.01)}{(s + 0.001)} \quad \rightarrow \quad K(s) = K_1(s) K_2(s)$$

tem-se  $K_v = 31$ , causando uma redução de 10 vezes no erro estacionário.

- ▶ Note que tanto a condição de módulo como a de ângulo são respeitadas, já que para um ponto de teste  $s_0 \gg 0$ , tem-se  $|K_2(s_0)| \approx 1$  e  $\angle K_2(s_0) \approx 0$ .

# Projeto de controladores usando o lugar das raízes

Compensador dinâmico: PID

- ▶ **Exemplo:** Para a planta  $P(s) = 1/(s(s+1))$  e polo desejado  $s_0 = -1 + j\sqrt{3}$ , projete um controlador PID dada por

$$K(s) = \frac{K_I + K_P s + K_D s^2}{s} = \frac{K_I(1 + \bar{K}_P s + \bar{K}_D s^2)}{s}$$

com  $K_P = K_I \bar{K}_P$  e  $K_D = K_I \bar{K}_D$ .

- ▶ Impondo que o numerador seja o produto de **dois zeros reais**, tem-se

$$1 + \bar{K}_P s + \bar{K}_D s^2 = (T_1 s + 1)(T_2 s + 1), \quad \text{com} \quad \bar{K}_P = T_1 + T_2, \quad \bar{K}_D = T_1 T_2$$

- ▶ Para que o sistema em malha fechada, considerando a planta  $P(s)$ , tenha um polo complexo em  $s_0 = -1 + j\sqrt{3}$ , o controlador  $K(s)$  precisa adicionar  $30^\circ$ :

$$\angle(T_1 s_0 + 1) + \angle(T_2 s_0 + 1) - \angle s_0 = 30^\circ$$

Equivalentemente

$$\angle(s_0 + 1/T_1) + \angle(s_0 + 1/T_2) - 120^\circ = 30^\circ$$

- ▶ Escolhendo  $T_1 = T_2$ , que fornece **o maior ganho  $K_I$** , tem-se

$$2\angle(s_0 + 1/T_1) = 150^\circ \Rightarrow \angle(s_0 + 1/T_1) = 75^\circ$$

# Projeto de controladores usando o lugar das raízes

Compensador dinâmico: PID

- ▶ Como  $s_0 = -1 + j\sqrt{3}$ , a relação

$$\angle -1 + j\sqrt{3} + 1/T_1 = 75^\circ$$

fornece:

$$\tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{3}}{1/T_1 - 1} \right) = 75^\circ \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{\tan 75^\circ}{\tan 75^\circ + \sqrt{3}} = 0.6830$$

- ▶ Assim, os parâmetros  $\bar{K}_P$  e  $\bar{K}_D$  são dados por

$$\bar{K}_P = 2T_1 = 1.3660 \quad \text{e} \quad \bar{K}_D = T_1^2 = 0.4665$$

- ▶ O ganho  $K_I$  é obtido diretamente da equação de módulo, dada por:

$$\left| K_I \frac{(1 + \bar{K}_P s + \bar{K}_D s^2)}{s} \frac{1}{s(s+1)} \right|_{s=s_0} = 1 \quad \Rightarrow \quad K_I = 4.6188$$

- ▶ Assim,  $K_P = K_I \bar{K}_P = 6.31$ ,  $K_D = K_I \bar{K}_D = 2.15$  e o controlador fica sendo:

$$K(s) = 6.3094 + \frac{4.6188}{s} + 2.1547 s$$

- ▶ **Observação:** Note que o projeto usando o lugar das raízes pode ser usado para projetar **qualquer tipo de controlador** dinâmico  $K(s)$ .

# Projeto de controladores usando o lugar das raízes

## Compensador dinâmico

► **Exemplo:** Considere o polo em  $s_0 = -1 + j\sqrt{3}$  e a planta  $P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

► Os seguintes controladores foram projetados:

1. Escolhendo arbitrariamente  $z = 1$ , tem-se:  $K(s) = 4 \frac{s+1}{s+2}$

que fornece  $K(0) = 2$  e polos em malha fechada **exatamente** em  $s = -1 \pm j\sqrt{3}$ .

2. Escolhendo  $z$  usando a linha bisettriz, tem-se:  $K(s) = 4.73 \frac{s+1.46}{s+2.73}$

que fornece  $K(0) = 2.54$  e polos em malha fechada em  $s = \{-1.73, -1 \pm j\sqrt{3}\}$ .

3. Escolhendo arbitrariamente  $z = 2$ , tem-se:  $K(s) = 6 \frac{s+2}{s+4}$

que fornece  $K(0) = 3$  e polos em malha fechada em  $s = \{-3, -1 \pm j\sqrt{3}\}$ .

4. Escolhendo  $z \rightarrow 4$ , para obter o maior ganho estático, tem-se:  $K(s) = 1200 \frac{s+3.99}{s+1198}$

que fornece  $K(0) = 3.9967$  e polos em malha fechada em  $s = \{-1197, -1 \pm j\sqrt{3}\}$ .

5. Escolhendo um PID com  $T_1 = T_2$ , tem-se:  $K(s) = 6.309 + 4.619/s + 2.155s$   
que fornece  $K_I = 4.62$  e polos em malha fechada em  $s = \{-1.15, -1 \pm j\sqrt{3}\}$ .

## Projeto de controladores usando o método Ziegler-Nichols

- ▶ É um método heurístico, prático e simples, usado para projetar o compensador PID

$$K(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$$

- ▶ A análise é baseada na resposta ao degrau de um processo, aproximado por

$$G(s) = \frac{\alpha}{\tau s + 1} e^{-sT}$$

- ▶ Fazendo  $K_I = K_D = 0$ , aumenta-se o ganho  $K_P$  até atingir o ganho crítico  $K_c$ , em que a saída do processo apresenta uma oscilação sustentável de período  $P_c$ .
- ▶ Em seguida, pode-se calcular um controlador P, PI ou PID, através da tabela abaixo:

Controlador	$K_P$	$T_I$	$T_D$
P	$0.5 K_c$	-	-
PI	$0.45 K_c$	$P_c/1.2$	-
PID	$0.6 K_c$	$P_c/2$	$P_c/8$

- ▶ Com esses ganhos, o compensador PID é dado por

$$K(s) = 0.075 K_c P_c (s + 4/P_c)^2 / s$$

que terá um polo na origem e um zero duplo em  $s = -4/P_c$ .

- ▶ Sendo um método heurístico, os ganhos inicialmente obtidos devem ser reajustados.