

EM707 – Controle de Sistemas Mecânicos

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

Nota ao leitor

- ▶ Estas notas são baseadas principalmente nas referências:
 - ▶ K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 4ª edição, Pearson Education do Brasil, 2003.
 - ▶ G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Ed., P.-Hall, 2010.
- ▶ Material suplementar:
 - ▶ R. C. Dorf and R. H. Dorf, *Sistemas de controle Modernos*, 8ª edição, LTC Livros Técnicos e científicos, 2001.
 - ▶ J. R. Rowland, *Linear Control Systems: Modeling, analysing, and design*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
 - ▶ B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall, 1994.

Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Ação de controle proporcional-integral (PI)

- ▶ Considere agora que a **planta é de 2ª ordem**, dada por

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- ▶ A função de transferência do ramo direto $G(s)$ é dada por

$$G(s) = \frac{K_P s + K_I}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

- ▶ A função de transferência em malha fechada é dada por

$$T(s) = \frac{K_P s + K_I}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) + K_I + K_P s}$$

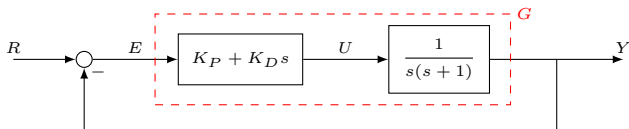
- ▶ Claramente, o efeito básico foi o mesmo do caso anterior: aumentar o tipo e a ordem do sistema e também incluir um zero em $s = -K_I/K_P$.
- ▶ Como o sistema agora é de 3ª ordem, a interpretação do desempenho já não é trivial.
- ▶ O sinal de erro $E(s)$ e o erro estacionário e_{ss} à entrada rampa são dados por

$$E(s) = \frac{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}{s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + (K_P + \omega_n^2)s + K_I} R(s) \quad \longrightarrow \quad e_{ss} = \frac{\omega_n^2}{K_I}$$

Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Ação de controle proporcional-derivativo (PD)

- Considere agora que a planta de 2ª ordem é do tipo 1.



- As funções de transferência $G(s)$ e $T(s)$ são dadas por

$$G(s) = \frac{K_P + K_D s}{s^2 + s}$$

$$T(s) = \frac{K_P + K_D s}{s^2 + (K_D + 1)s + K_P}$$

- Como esperado, nem o tipo nem a ordem do sistema foram alterados.
- Como $G(s)$ é do tipo 1, o erro estacionário à rampa é dado por

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}, \quad \text{com} \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = K_P$$

- Os polos de malha fechada são as raízes de

$$s^2 + (K_D + 1)s + K_P = 0$$

Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Ação de controle proporcional-derivativo (PD)

- ▶ Assim, é possível projetar K_P e K_D de forma a se obter ζ e ω_n desejáveis:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

- ▶ Igualando ambos os polinômios, obtém-se os ganhos do controlador:

$$K_P = \omega_n^2 \quad \text{e} \quad K_D = 2\zeta\omega_n - 1$$

- ▶ Por outro lado, dados K_P e K_D , tem-se

$$\omega_n = \sqrt{K_P} \quad \text{e} \quad \zeta = (1 + K_D)/(2\sqrt{K_P})$$

- ▶ Note que o sistema em malha fechada tem um zero em

$$s = -\frac{K_P}{K_D} = -\frac{\omega_n^2}{2\zeta\omega_n - 1}$$

- ▶ Com os ganhos acima calculados, o sistema em malha fechada passa a ser

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{K_P + K_D s}{s^2 + (K_D + 1)s + K_P} = \frac{\omega_n^2 + (2\zeta\omega_n - 1)s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \alpha s \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= T_m(s) + s \alpha T_m(s), \quad \text{com } \alpha = (2\zeta\omega_n - 1)/\omega_n^2 \end{aligned}$$

Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Ação de controle proporcional-integral-derivativo (PID)

- ▶ Considere agora que a **planta é de 2ª ordem**, dada por

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- ▶ A função de transferência do ramo direto é dada por

$$G(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

- ▶ A função de transferência em malha fechada é dada por

$$T(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s^3 + (K_D + 2\zeta\omega_n)s^2 + (K_P + \omega_n^2)s + K_I}$$

- ▶ Perceba que houve a adição de 02 zeros e a ordem e o tipo do sistema aumentaram.

- ▶ O sinal de erro é dado por

$$E(s) = \frac{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}{s^3 + (K_D + 2\zeta\omega_n)s^2 + (K_P + \omega_n^2)s + K_I} R(s)$$

- ▶ Como o sistema é do tipo 1, o erro estacionário à rampa é dado por $e_{ss} = \frac{\omega_n^2}{K_I}$.

Análise do erro estacionário

Adição da dinâmica do sensor

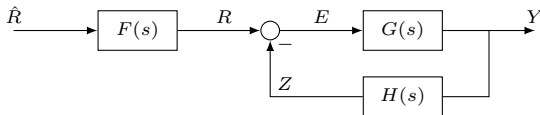
- ▶ As funções de transferência em malha fechada entre R e os sinais Y e Z são:

$$Y = \frac{G}{1 + HG} R \quad \Rightarrow \quad \frac{Z}{R} = \frac{HG}{1 + HG}$$

- ▶ O sinal de erro $E = R - Z$ é dado por

$$E = \left(1 - \frac{HG}{1 + HG}\right) R = \frac{1}{1 + HG} R$$

- ▶ Note que o tipo da malha aberta $G(s)H(s)$ determinará o comportamento do sinal E e, conseqüentemente, do sinal Z (em relação à entrada R).
- ▶ Porém, nada pode ser afirmado sobre $y(t)$, mesmo que $e(t) = r(t) - z(t) \rightarrow 0$.
- ▶ Como $R(s)$ é uma entrada de projeto, pode-se defini-la como $R(s) = F(s)\hat{R}(s)$.



- ▶ Note que os sinais E , R e Z devem ter a mesma unidade. O sinal \hat{R} pode ser escolhido para ter a mesma unidade que o sinal Y .

Análise do erro estacionário

Adição da dinâmica do sensor

- ▶ O erro entre \hat{R} e Y (que agora têm a mesma unidade) é dado por

$$\hat{E} = \hat{R} - Y = \left(1 - \frac{G}{1 + HG} F\right) \hat{R} = \frac{1 + G(H - F)}{1 + HG} \hat{R}$$

Assim, se $\hat{e}(t) \rightarrow 0$, então $y(t) \rightarrow \hat{r}(t)$.

- ▶ Note que o valor do erro \hat{E} dependerá da escolha de $F(s)$ (variável de projeto).
- ▶ Claramente, escolhendo $F(s) = H(s)$, obtém-se

$$\frac{Y}{\hat{R}} = \frac{HG}{1 + HG} \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{E}}{\hat{R}} = \frac{1}{1 + HG}$$

- ▶ Portanto, o tipo da malha aberta $H(s)G(s)$ determinará o comportamento do erro estacionário

$$\hat{e}_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{E}(s), \quad \text{com} \quad \hat{E} = \hat{R} - Y$$

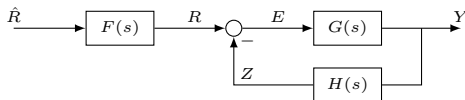
- ▶ Consequentemente, o comportamento do sinal de saída Y (em relação à entrada \hat{R}) também será determinado pelo tipo da malha aberta $H(s)G(s)$:

$$\frac{Z}{R} = \frac{Y}{\hat{R}} = \frac{HG}{1 + HG} \quad \text{e} \quad \frac{E}{R} = \frac{R - Z}{R} = \frac{H(\hat{R} - Y)}{H\hat{R}} = \frac{\hat{E}}{\hat{R}}$$

Análise do erro estacionário

Adição da dinâmica do sensor

- **Exemplo:** Considere a malha de controle abaixo.



- A planta $G(s)$ e o sensor $H(s)$ são dados por:

$$G(s) = \frac{5}{s+1} \text{ [rad/mA]} \quad \text{e} \quad H(s) = \frac{s+1}{s(s+50)} \text{ [mA/rad]}$$

- As funções de transferência em malha fechada entre R e os sinais Y , Z e E são:

$$\frac{Y}{R} = \frac{5s}{(s+1)(s+1/10)}, \quad \frac{Z}{R} = \frac{5}{(s+50)(s+1/10)} \quad \text{e} \quad \frac{E}{R} = \frac{s}{(s+1/10)}$$

- Note que a malha aberta $H(s)G(s)$ é do tipo 1. Portanto:

$$Kv = \lim_{s \rightarrow 0} s H(s)G(s) = 1/10 \quad \implies \quad e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 10$$

- Assim, o sinal $z(t)$: $\begin{cases} \text{- seguirá sem erro uma entrada } r(t) \text{ do tipo degrau;} \\ \text{- terá erro estacionário para uma entrada } r(t) \text{ do tipo rampa.} \end{cases}$

Análise do erro estacionário

Adição da dinâmica do sensor

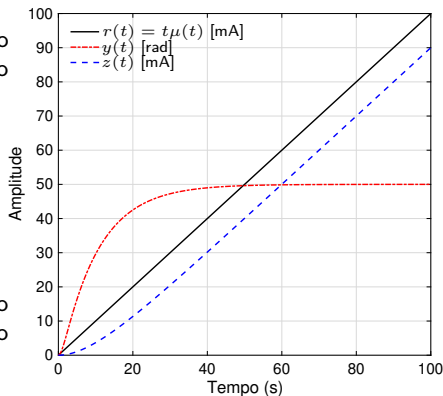
- ▶ Embora, para uma entrada $r(t)$, o tipo de $G(s)H(s)$ tenha sido capaz de prever o comportamento do sinal $z(t)$, nada pode ser afirmado sobre a saída $y(t)$.
- ▶ De fato, para uma entrada $r(t)$ do tipo rampa, a saída $y(t)$ terá erro estacionário infinito, já que $y_{ss} = 50$, como pode ser visto no gráfico abaixo.

- ▶ Porém, escolhendo $F(s) = H(s)$, a função de transferência entre Y/\hat{R} e o sinal de erro $\hat{E} = \hat{R} - Y$ são dados por:

$$\frac{Y}{\hat{R}} = \frac{5}{(s + 50)(s + 1/10)}$$

$$\frac{\hat{E}}{\hat{R}} = \frac{E}{R} = \frac{s}{s + 1/10}$$

- ▶ Agora, para uma entrada $\hat{r}(t)$ do tipo rampa, a saída $y(t)$ terá erro estacionário finito, dado por $\hat{e}_{ss} = 10$.

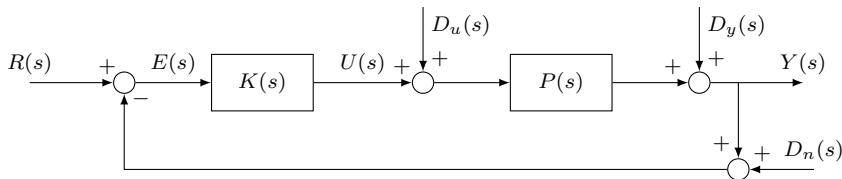


- ▶ O comportamento de $y(t)$ em relação a $\hat{r}(t)$ foi idêntico ao de $z(t)$ com $r(t)$.

Efeito do distúrbio na saída do sistema

Sistema de controle com entradas de distúrbio

- Considere o diagrama de blocos da figura abaixo controle abaixo.



- Do diagrama, tem-se que $E(s)$ e $U(s)$ são respectivamente dados por

$$E(s) = R(s) - Y(s) - D_n(s) \quad \text{e} \quad U(s) = K(s)E(s)$$

- O sinal de saída $Y(s)$ é dado por

$$Y(s) = D_y + P(D_u + U) = D_y + P[D_u + K(R - Y - D_n)]$$

- Assim

$$Y(1 + PK) = PD_u + PK(R - D_n) + D_y$$

- Fornecendo finalmente

$$Y(s) = \frac{P}{1 + PK} D_u + \frac{PK}{1 + PK} (R - D_n) + \frac{1}{1 + PK} D_y$$

Efeito do distúrbio na saída do sistema

Ação de controle-P

- **Exemplo 1:** Considere um sistema de 1ª ordem com um **controlador proporcional**.

$$K(s) = K_P \quad \text{e} \quad P(s) = \frac{K_0}{Ts + 1}$$

- A saída fica sendo

$$Y(s) = \frac{K_0}{Ts + 1 + K_0 K_P} D_u + \frac{K_0 K_P}{Ts + 1 + K_0 K_P} (R - D_n) + \frac{Ts + 1}{Ts + 1 + K_0 K_P} D_y$$

- Assumindo que todas as entradas são do tipo degrau, tem-se

$$y_{ss} = \frac{K_0}{1 + K_0 K_P} d_u + \frac{K_0 K_P}{1 + K_0 K_P} (r - d_n) + \frac{1}{1 + K_0 K_P} d_y$$

em que r , d_u , d_y e d_n são as amplitudes dos degraus de entrada.

- Se $K_P \ggg 1$ e $K_0 K_P \ggg 1$, então

$$y_{ss} \approx \frac{1}{K_P} d_u + (r - d_n) + \frac{1}{K_0 K_P} d_y \quad \longrightarrow \quad y_{ss} \approx r - d_n$$

- Claramente, os distúrbios de entrada do tipo degrau $d_u(t) = d_u \mu(t)$ e $d_y(t) = d_y \mu(t)$ podem ser atenuados. Porém, d_n não pode ser rejeitado.

Efeito do distúrbio na saída do sistema

Ação de controle-PI

- **Exemplo 2:** Considere um sistema de 1ª ordem com um **controlador PI**.

$$K(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s}$$

$$P(s) = \frac{K_0}{Ts + 1}$$

- A saída é dada por

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{K_0 s}{Ts^2 + (K_0 K_P + 1)s + K_0 K_I} D_u \\ &+ \frac{K_0 (K_P s + K_I)}{Ts^2 + (K_0 K_P + 1)s + K_0 K_I} (R - D_n) \\ &+ \frac{s(Ts + 1)}{Ts^2 + (K_0 K_P + 1)s + K_0 K_I} D_y \end{aligned}$$

- Assumindo entradas do tipo degrau, o erro estacionário é dado por

$$y_{ss} = r - d_n$$

- Os distúrbios $d_u(t) = d_u \mu(t)$ e $d_y(t) = d_y \mu(t)$ foram totalmente rejeitados independentemente dos valor dos ganhos. Porém, d_n não pode ser rejeitado.

Efeito do distúrbio na saída do sistema

Ação de controle-PD

- **Exemplo 3:** Considere um sistema de 1ª ordem com um **controlador PD**.

$$K(s) = K_P + K_D s \quad \text{e} \quad P(s) = \frac{K_0}{Ts + 1}$$

- Assim, a saída é dada por

$$\begin{aligned} Y(s) = & \frac{K_0}{Ts + 1 + K_0(K_P + K_D s)} D_u \\ & + \frac{K_0(K_P + K_D s)}{Ts + 1 + K_0(K_P + K_D s)} (R - D_n) \\ & + \frac{Ts + 1}{Ts + 1 + K_0(K_P + K_D s)} D_y \end{aligned}$$

- Em regime estacionário, para entrada do tipo degrau, tem-se

$$y_{ss} = \frac{K_0}{1 + K_0 K_P} d_u + \frac{K_0 K_P}{1 + K_0 K_P} (r - d_n) + \frac{1}{1 + K_0 K_P} d_y$$

- Se $K_P \ggg 1$ e $K_0 K_P \ggg 1$, então

$$y_{ss} \approx \frac{1}{K_P} d_u + (r - d_n) + \frac{1}{K_0 K_P} d_y \quad \longrightarrow \quad y_{ss} \approx r - d_n$$

Efeito do distúrbio na saída do sistema

Ação de controle-PID

- **Exemplo 4:** Considere um sistema de 1ª ordem com um **controlador PID**.

$$K(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$
$$P(s) = \frac{K_0}{Ts + 1}$$

- A saída do sistema é dada por

$$Y(s) = \frac{K_0 s}{(K_0 K_D + T)s^2 + (K_0 K_P + 1)s + K_0 K_I} D_u$$
$$+ \frac{K_0 (K_D s^2 + K_P s + K_I)}{(K_0 K_D + T)s^2 + (K_0 K_P + 1)s + K_0 K_I} (R - D_n)$$
$$+ \frac{(Ts + 1)s}{(K_0 K_D + T)s^2 + (K_0 K_P + 1)s + K_0 K_I} D_y$$

- Assumindo entradas do tipo degrau, a saída em regime estacionário é

$$y_{ss} = r - d_n$$

Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

- Considere a seguinte função de transferência:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\bar{b}_0 s^m + \bar{b}_1 s^{m-1} + \cdots + \bar{b}_{m-1} s + \bar{b}_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

- O critério diz se há ou não raízes instáveis sem precisar calcular as raízes de $A(s)$.

- **Método:**

1. Escreva $A(s)$ na forma $s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$
2. **Obs:** Assume-se que $a_n \neq 0$. Caso contrário, elimina-se as raízes nulas.
3. Se algum coeficiente for zero ou negativo, então existirá uma ou várias raízes imaginárias ou que tenham parte real positiva. Portanto, todos os coeficientes devem ser positivos. Essa é uma condição necessária mas não suficiente.
4. Organize os coeficientes na seguinte matriz:

$$\begin{array}{cccccc} s^n : & 1 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ s^{n-1} : & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ s^{n-2} : & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\ s^{n-3} : & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots \\ & \vdots & & & & \\ & \vdots & & & & \\ s^2 : & e_1 & e_2 & & & \\ s^1 : & f_1 & & & & \\ s^0 : & g_1 & & & & \end{array}$$

Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

- ▶ Os coeficientes b_1, b_2, b_3, \dots são dados por

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1}, & b_2 &= \frac{a_1 a_4 - a_5}{a_1}, & b_3 &= \frac{a_1 a_6 - a_7}{a_1}, \\ c_1 &= \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, & c_2 &= \frac{b_1 a_5 - b_3 a_1}{b_1}, & c_3 &= \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}, \\ d_1 &= \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{c_1}, & d_2 &= \frac{c_1 b_3 - c_3 b_1}{c_1}, \dots \end{aligned}$$

- ▶ O critério afirma que o número de raízes com parte reais positivas é igual ao número de mudanças no sinal dos coeficientes da primeira coluna ($a_1, b_1, \dots, e_1, f_1, g_1$).
- ▶ **Exemplo:** Considere o polinômio: $s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$. A tabela é dada por:

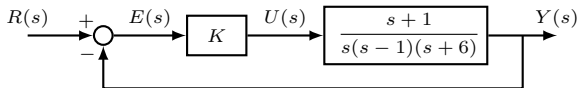
$$\begin{array}{rcl} s^3 : & 1 & a_2 \\ s^2 : & a_1 & a_3 \\ s^1 : & \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1} & \\ s^0 : & a_3 & \end{array}$$

- ▶ Portanto, as condições para que todas as raízes tenham parte reais negativas são:

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad \text{e} \quad a_2 > \frac{a_3}{a_1}$$

Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

- **Exemplo:** Determine para quais valores de K o sistema em malha fechada é estável.



- A equação característica é dada por

$$1 + K \frac{s+1}{s(s-1)(s+6)} = 0$$

ou seja

$$s^3 + 5s^2 + (K-6)s + K = 0$$

- A tabela de Routh é dada por

$$\begin{array}{lcl} s^3 : & 1 & K-6 \\ s^2 : & 5 & K \\ s^1 : & (4K-30)/5 & \\ s^0 : & K & \end{array}$$

- Portanto, concluí-se que $K > 0$ e $(4K-30)/5 > 0$, ou seja, $K > 7.5$.

Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

► **Caso Especial I:** Um termo na primeira coluna é nulo.

► **Exemplo:** Considere o polinômio $s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$.

► A tabela é dada por:

$$\begin{array}{rcl} s^3 : & 1 & 1 \\ s^2 : & 2 & 2 \\ s^1 : & 0 \approx \varepsilon & \\ s^0 : & 2 & \end{array}$$

► Isso implica que existe um par de raízes imaginárias.

► Note que $s^3 + 2s^2 + s + 2 = (s + 2)(s + j)(s - j)$.

► **Exemplo:** Considere o seguinte polinômio $s^3 - 3s + 2 = (s - 1)^2(s + 2) = 0$.

► A tabela é dada por:

$$\begin{array}{rcl} s^3 : & 1 & -3 \\ s^2 : & 0 \approx \varepsilon & 2 \\ s^1 : & -3 - \frac{2}{\varepsilon} & \\ s^0 : & 2 & \end{array}$$

► Note que ocorrem duas mudanças de sinal dos coeficientes da primeira coluna.

Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

- **Caso Especial II:** Uma linha inteira da matriz é nula. Nesse caso há raízes de mesmo valor absoluto situadas radialmente opostas.
- **Exemplo:** Considere o seguinte polinômio $s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50$. As raízes desse polinômio são: $-2, \pm 5j, \pm 1$. A tabela é dada por:

$s^5 :$	1	24	-25
$s^4 :$	2	48	-50
$s^3 :$	0	0	0
$s^3 :$	8	96	
$s^2 :$	24	-50	
$s^1 :$	112.7	0	
$s^0 :$	-50		

Forma-se o polinômio auxiliar:

$$p(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

$$dp(s) = 8s^3 + 96s$$

- **Exemplo:** Considere o seguinte polinômio $s^3 + 2s^2 - s - 2 = (s + 2)(s + 1)(s - 1)$. A tabela é dada por:

$s^3 :$	1	-1
$s^2 :$	2	-2
$s^1 :$	0	0
$s^1 :$	4	0
$s^0 :$	-2	

Forma-se o polinômio auxiliar:

$$p(s) = 2s^2 - 2 \rightarrow dp(s) = 4s$$