EM707 – Controle de Sistemas Mecânicos

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

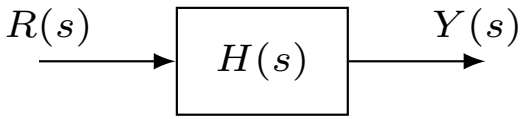
Nota ao leitor

- Estas notas são baseadas principalmente nas referências:
  - K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 4ª edição, Pearson Education do Brasil, 2003.
  - G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Ed., P.-Hall, 2010.
- Material suplementar:
  - R. C. Dorf and R. H. Dorf, *Sistemas de controle Modernos*, 8ª edição, LTC Livros Técnicos e científicos, 2001.
  - J. R. Rowland, *Linear Control Systems: Modeling, analysing, and design*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
  - B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall, 1994.

Análise de resposta transitória e de regime estacionário

Sistemas de 1ª ordem

- Considere o sistema abaixo, que relaciona a entrada $R(s)$ com a saída $Y(s)$.



- Considere o sistema de primeira ordem com ganho unitário dado por

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{polo em } s = -1/T$$

- A **resposta ao degrau** desse sistema é dada por

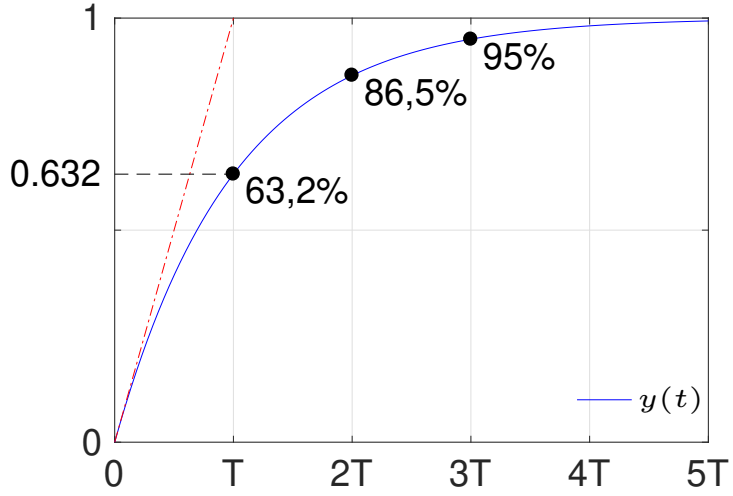
$$Y(s) = \frac{1}{Ts+1}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/T}$$

- Assim, $y(t) = 1 - e^{-t/T}$ para $t \geq 0$.

  1. Para $t = T$, tem-se $y(T) = 0.632$.
  2. A reta tracejada tem inclinação:

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 1/T$$

  3. O sinal de erro é $e(t) = r(t) - y(t) = e^{-t/T}$



Análise de resposta transitória e de regime estacionário

Sistemas de 1ª ordem

- A **resposta à rampa** desse sistema é dada por

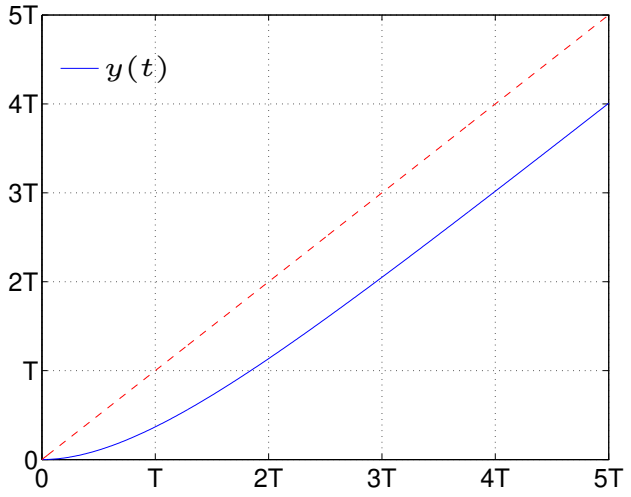
$$Y(s) = \frac{1}{Ts+1}\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1}$$

- Assim, $y(t) = t - T + Te^{-t/T}$ para $t \geq 0$.

- O sinal de erro é dado por

$$e(t) = r(t) - y(t) = T(1 - e^{-t/T})$$

- Portanto, o erro estacionário é $e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = T$.



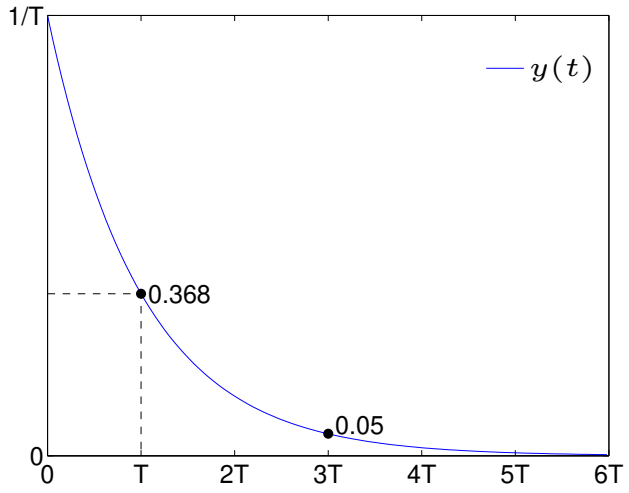
Análise de resposta transitória e de regime estacionário

Sistemas de 1ª ordem

- A **resposta ao impulso** desse sistema é dada por

$$Y(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

- Assim, $y(t) = 1/Te^{-t/T}$ para $t \geq 0$.
- A figura abaixo apresenta a resposta ao impulso de um sistema de 1ª ordem.



- Resposta à derivada de um sinal de entrada.
  1. Rampa: $y(t) = t - T + Te^{-t/T}$ para $t \geq 0$;
  2. Degrau: $y(t) = 1 - e^{-t/T}$ para $t \geq 0$;
  3. Impulso: $y(t) = 1/Te^{-t/T}$ para $t \geq 0$.

Análise de resposta transitória e de regime estacionário

Sistemas de 2ª ordem

- Considere o seguinte sistema de 2ª ordem (na forma padrão):

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Os polos do sistema são dados por

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

- Três casos são possíveis:

1. Sistema subamortecido, $0 \leq \zeta < 1$. Os polos complexos são dados por

$$s = -\zeta\omega_n \pm \mathrm{j}\omega_d, \qquad \text{com} \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

2. Sistema criticamente amortecido, $\zeta = 1$. Os dois polos, reais e iguais, são dados por

$$s = -\omega_n$$

3. Sistema superamortecido, $\zeta > 1$. Os polos, reais e distintos, são dados por

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Análise de resposta transitória e de regime estacionário

Sistemas de 2ª ordem

- **Resposta ao degrau** de um sistema subamortecido ($0 \leq \zeta < 1$).
- A função de transferência é dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \mathrm{j}\omega_d)(s + \zeta\omega_n - \mathrm{j}\omega_d)}, \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

- Assim, com $R(s) = 1/s$, a resposta $Y(s)$ é dada por

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s} = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

- Aplicando as seguintes transformadas inversas

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t$$

obtém-se a resposta ao degrau:

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right), \qquad t \geq 0$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_d t + \phi\right), \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

Análise de resposta transitória e de regime estacionário

Sistemas de 2ª ordem

- **Resposta ao degrau** de um sistema criticamente amortecido ($\zeta = 1$).
- A resposta $Y(s)$ nesse caso fica sendo:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s+2\omega_n}{(s+\omega_n)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_n} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}$$

- As seguintes propriedades serão necessárias:
  1. $\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] = F(s+\alpha)$
  2. $\mathcal{L}[tf(t)] = -\dfrac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s}$
- O termo $\frac{1}{s+\omega_n}$ é obtido da propriedade 1 com $F(s) = \frac{1}{s}$ e $\alpha = \omega_n$, ou seja

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\omega_n}\right] = e^{-\omega_n t}\mu(t)$$

- O termo $\frac{1}{(s+\omega_n)^2}$ é obtido da propriedade 2 com $F(s) = (s+\omega_n)^{-1}$, ou seja

$$-\frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{(s+\omega_n)^2} \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = e^{-\omega_n t} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{1}{(s+\omega_n)^2}\right] \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} te^{-\omega_n t}\mu(t)$$

- Portanto

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t), \quad t \geq 0$$

Análise de resposta transitória e de regime estacionário

Sistemas de 2ª ordem

- **Resposta ao degrau** de um sistema superamortecido ($\zeta > 1$).
- A função de transferência é dada por

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s+s_1)(s+s_2)}$$

com

$$s_1 = \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad \text{e} \qquad s_2 = \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

- Decompondo em frações parciais com $R(s) = 1/s$, tem-se:

$$\frac{Y(s)}{\omega_n^2} = \frac{b}{s} + \frac{a_1}{s+s_1} + \frac{a_2}{s+s_2}$$

com

$$b = \frac{1}{s_1 s_2}, \qquad a_1 = \frac{1}{s_1(s_1 - s_2)}, \qquad a_2 = -\frac{1}{s_2(s_1 - s_2)}$$

- A transformada inversa fornece

$$y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}\right), \qquad t \geq 0$$

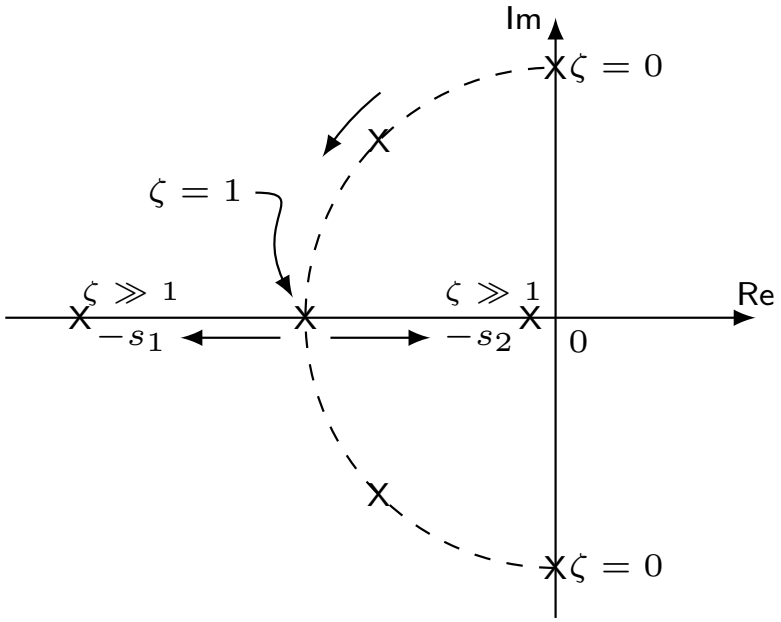
Análise de resposta transitória e de regime estacionário

Sistemas de 2ª ordem

- Observe que se $\zeta \gg 1$, os polos se distanciam e tendem para

$$s = -s_1 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \rightarrow \quad -\zeta\omega_n - \zeta\omega_n = -2\zeta\omega_n \quad \rightarrow \quad -\infty$$

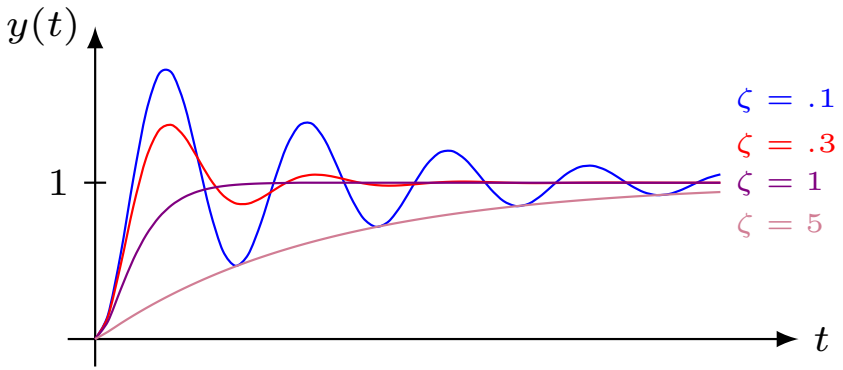
$$s = -s_2 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \rightarrow \quad -\zeta\omega_n + \zeta\omega_n \quad \rightarrow \quad 0$$



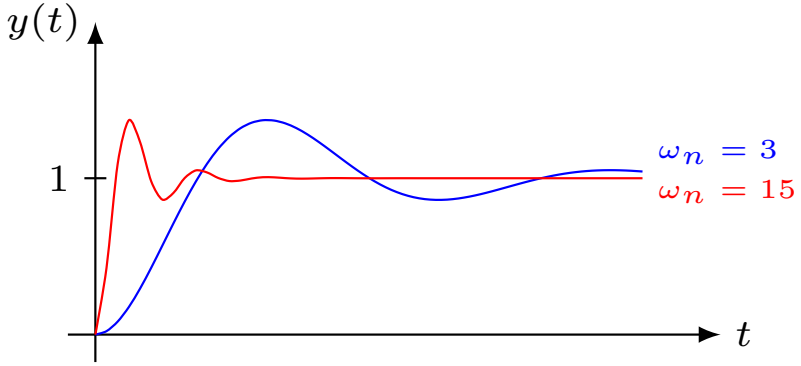
- Exercício: Prove que pode-se desprezar o polo $-s_1$ (pois seu efeito na resposta é muito menor do que o do polo $-s_2$, já que $s_1 \gg s_2$) e aproximar o sistema como sendo de 1ª ordem:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s_2}{s + s_2}$$

- O gráfico abaixo apresenta a resposta de um sistema de 2ª ordem para diferentes valores de ζ com $\omega_n = 7$ rad/s.



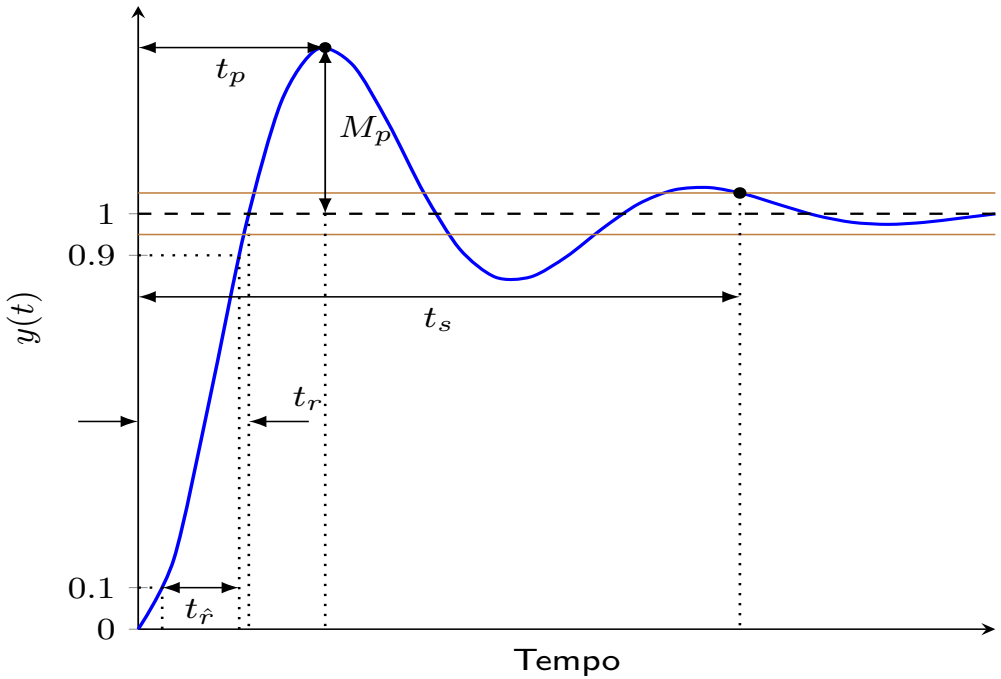
- O gráfico abaixo apresenta a resposta de um sistema de 2ª ordem para diferentes valores de ω_n com $\zeta = 0.3$.



Análise de resposta transitória e de regime estacionário

Especificações de desempenho para sistemas de 2ª ordem

- Tempo de atraso, t_d: o tempo requerido para que $y(t)$ alcance 50% do valor final.
- Tempo de subida, t_r: o tempo requerido para que a resposta passe de 10% a 90% em sistemas superamortecidos e de 0% a 100% em sistemas subamortecidos.
- Máximo sobressinal (overshoot), $M_P = \dfrac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)}$
- Tempo de pico, t_p: o tempo necessário para que $y(t)$ atinja o pico de sobressinal.
- Tempo de acomodação, t_s: tempo necessário para que a resposta alcance valores em uma faixa (usualmente 2% ou 5%).



Sistema de 2ª ordem na forma padrão

Análise de resposta transitória e de regime estacionário

Especificações de desempenho para sistemas de 2ª ordem

- Tempo de subida t_r.
- A resposta ao degrau, para $0 \leq \zeta < 1$, foi calculada como sendo

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \left(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)\sin\omega_d t\right)$$

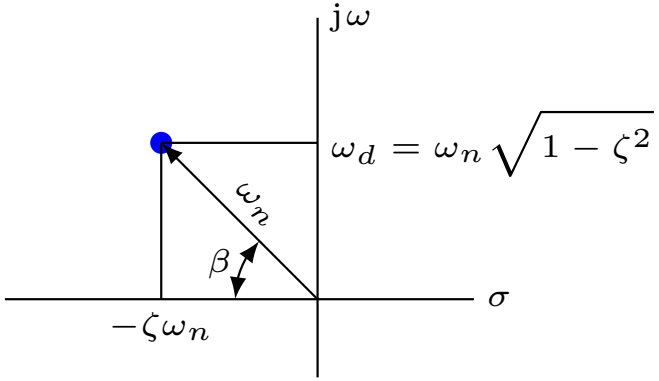
- Fazendo $y(t_r) = 1$ na resposta ao degrau, tem-se

$$1 - e^{-\zeta\omega_n t_r}\left(\cos\omega_d t_r + \left(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)\sin\omega_d t_r\right) = 1$$

- Como $e^{-\zeta\omega_n t_r} \neq 0$, tem-se: $\cos\omega_d t_r + \dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t_r = 0$
- Assim:

$$\tan\omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = -\frac{\omega_d}{\zeta\omega_n}$$

$$t_r = \frac{1}{\omega_d}\tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{-\zeta\omega_n}\right) = \frac{\pi-\beta}{\omega_d}$$



- Um ajuste de curva fornece $t_r = (15.5\zeta^3 - 17.9\zeta^2 + 9.1\zeta + 0.4)/\omega_n$.
- O tempo de subida de 10% a 90%, assumindo $\zeta = 0.5$, é $t_{\hat{r}} \approx 1.8/\omega_n$.

Análise de resposta transitória e de regime estacionário

Especificações de desempenho para sistemas de 2ª ordem

- Tempo de pico t_p.
- Para determinar t_p, basta derivar $y(t)$ e igualar a zero, fornecendo:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dy(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_p} &= \zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t_p}\left(\cos\omega_d t_p + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t_p\right) \\
&\quad + e^{-\zeta\omega_n t_p}\left(\omega_d \sin\omega_d t_p - \frac{\zeta\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\omega_d t_p\right) \\
&= e^{-\zeta\omega_n t_p}\left(\frac{\zeta^2\omega_n^2}{\omega_d}\sin\omega_d t_p + \omega_d \sin\omega_d t_p\right) \\
&= e^{-\zeta\omega_n t_p}\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t_p = 0 \quad \text{“resposta ao impulso”}
\end{aligned}$$

- Essa equação implica:

$$\sin\omega_d t_p = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, \ldots$$

- Como t_p ocorre no primeiro pico, obtém-se

$$\omega_d t_p = \pi \qquad \Rightarrow \qquad t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Análise de resposta transitória e de regime estacionário

Especificações de desempenho para sistemas de 2ª ordem

- Máximo sobressinal M_p.
- O máximo sobressinal M_p ocorre apenas para $0 \leq \zeta < 1$, no tempo $t = t_p$.
- Lembrando que $t_p = \pi/\omega_d$ e a resposta ao degrau foi calculada com sendo

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)$$

- Obtem-se

$$M_p = y(t_p) - 1 = -e^{-\zeta\omega_n(\pi/\omega_d)}\left(\cos\pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\pi\right) = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- Se $\zeta = 0.5$, então $M_p \approx 16\%$. Se $\zeta = 0.7$, então $M_p \approx 5\%$.
- Se o valor final $y(\infty)$ não for unitário, então pode-se normalizar como segue:

$$M_P = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)}$$

Análise de resposta transitória e de regime estacionário

Especificações de desempenho para sistemas de 2ª ordem

- Tempo de acomodação t_s (limitante superior).
- A resposta ao degrau foi calculada como sendo

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_d t + \phi\right)$$

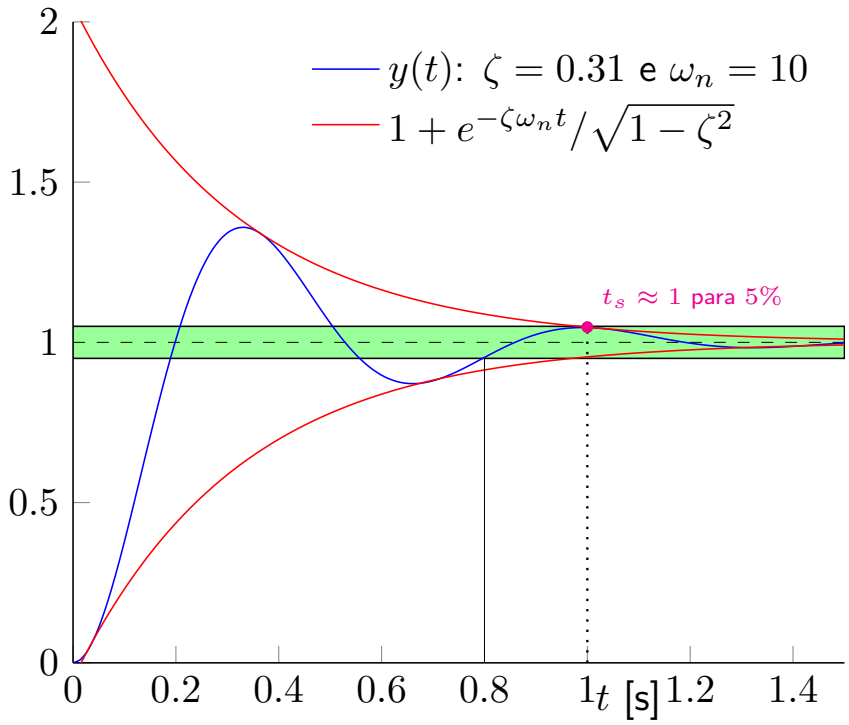
- Como o desvio de $y(t)$ da unidade é o produto de $e^{-\zeta\omega_n t}/\sqrt{1-\zeta^2}$ pela função seno, o decaimento é essencialmente ditado pela exponencial (envoltória).
- Valor de t_s (pela envoltória) é:

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \{1\%, 2\%, 5\%, \dots\}$$

- Por exemplo, para um tempo de acomodação a 2% com $\zeta < 0.7$, tem-se:

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.02 \quad \Rightarrow \quad \zeta\omega_n t_s \approx 4$$

$$\Rightarrow \quad t_s \approx \frac{4}{\sigma}, \quad \text{com} \quad \sigma = \zeta\omega_n$$



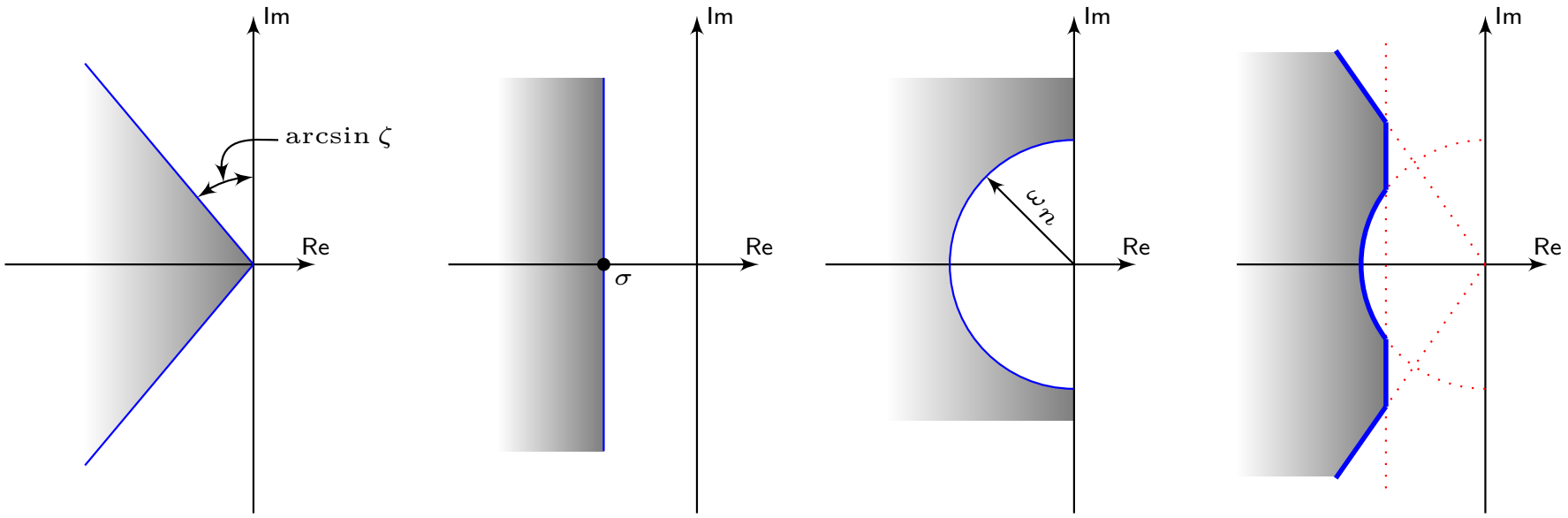
Análise de resposta transitória e de regime estacionário

Especificações de desempenho para sistemas de 2ª ordem

- Geralmente são especificados t_r, M_p e t_s e deseja-se saber a localização dos polos do sistema a atender essas especificações.
- Foi visto que as especificações são dadas por:

$$\omega_n \geq \frac{1.8}{t_r}, \qquad \zeta \geq \zeta(M_p), \qquad \sigma = \zeta\omega_n \geq \frac{4}{t_s} \quad \text{para} \quad 2\%$$

- Gráfico da região no plano complexo que atende as especificações.



(a) M_p (b) t_s (c) t_r (d) Região

Análise de resposta transitória e de regime estacionário

Especificações de desempenho para sistemas de 2ª ordem

- Exemplo: Faça o gráfico da região do plano complexo para a localização dos polos de um sistema de forma a atender as seguintes especificações:
  - Tempo de subida de $t_r \leq 0.6$s; Máximo sobressinal $M_p \leq 4.3\%$;
    Tempo de acomodação $t_s \leq 3$s a 1%.

- Solução. Usando t_r, determina-se a seguinte restrição na frequência natural ω_n:

$$\omega_n \geq \frac{1.8}{t_r} = 3$$

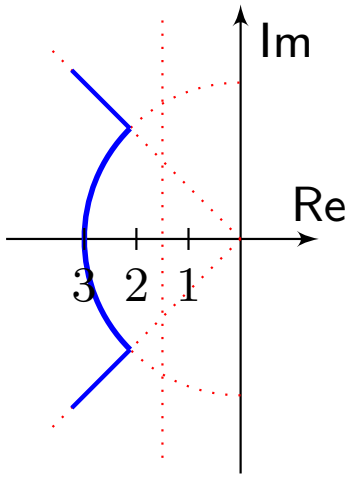
- Usando M_p, determina-se a seguinte restrição no fator de amortecimento ζ:

$$\zeta^2 = \frac{\ln(M_p)^2}{\pi^2 + \ln(M_p)^2} \quad \Rightarrow \quad \zeta \geq 0.7077 \quad \rightarrow \quad \theta \geq 45.5^\circ$$

- Finalmente, usando t_s, tem-se a seguinte restrição:

$$\sigma \geq \frac{4.6}{3} \approx 1.5$$

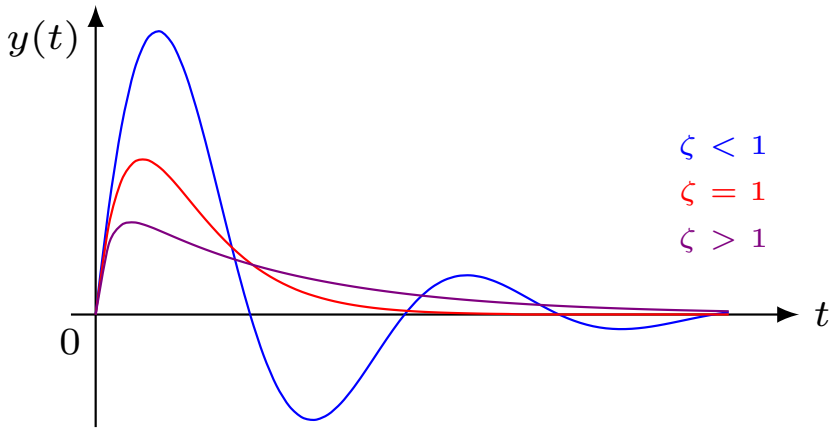
- A região das especificações está apresentada na figura ao lado.

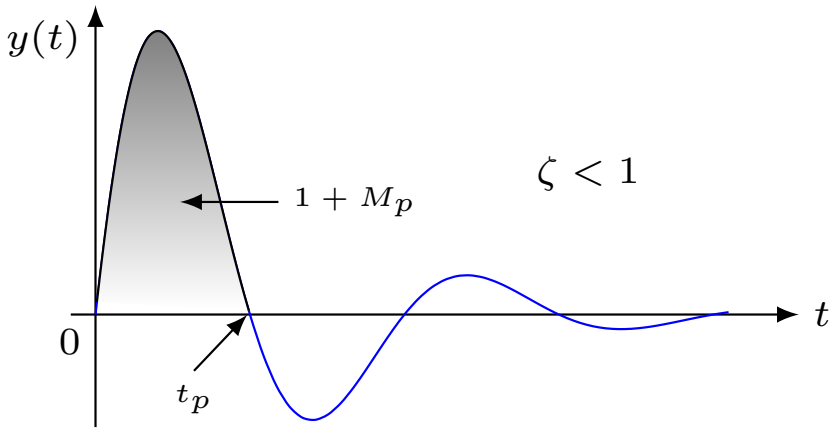


Análise de resposta transitória e de regime estacionário

Resposta ao impulso de um sistema de 2ª ordem

- **Para o impulso**, $R(s) = 1$ e assim $Y(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$.
- Dependendo do valor de ζ, tem-se:
  - para $0 \leq \zeta < 1$, $y(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t, \quad t \geq 0$;
  - para $\zeta = 1$, $y(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}, \quad t \geq 0$;
  - para $\zeta > 1$, $y(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} \left(e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} - e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} \right), \quad t \geq 0$;
- A área sob a curva da resposta ao impulso, de $t = 0$ até $t = t_p$, é $1 + M_P$.

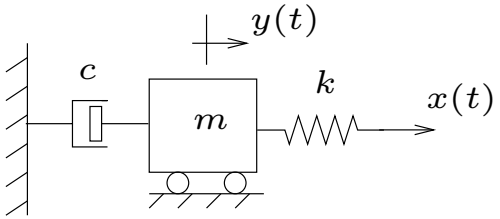




Análise de resposta transitória e de regime estacionário

Resposta ao impulso: sistemas de 2ª ordem

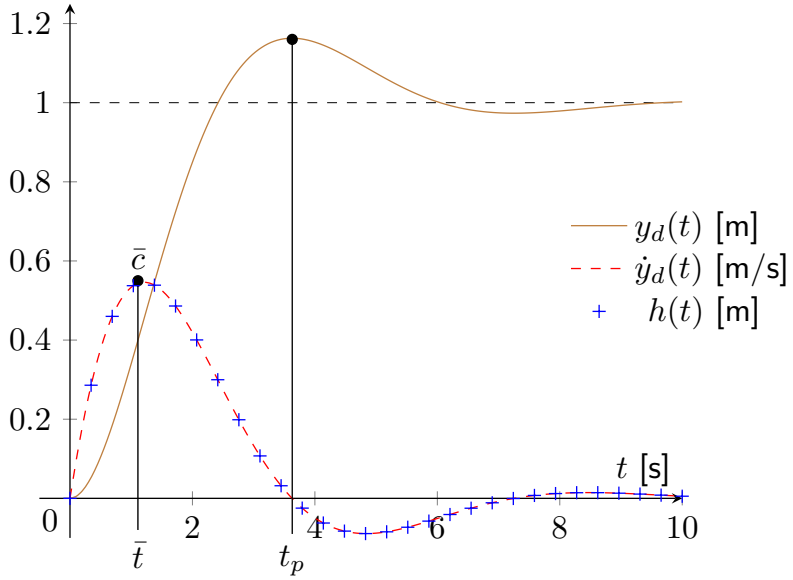
- Exemplo: Seja o sistema abaixo



cuja função de transferência é

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Resposta ao degrau $y_d(t)$ e ao impulso $h(t)$.



- O gráfico acima apresenta, para uma entrada em degrau $x(t) = \mu(t)$ [m], a saída em deslocamento $y_d(t)$ [m] e a velocidade $\dot{y}_d(t)$ [m/s] do carro.
- Observa-se que a velocidade $\dot{y}_d(t)$ [m/s] para a entrada degrau é equivalente (tem a mesma curva) que a resposta impulsiva $h(t)$ [m] para $x(t) = \delta(t)$ [m].
- Para $\zeta = 0.5$ e $\omega_n = 1$ rad/s, os valores numéricos são:

$$t_p = 3.63 \text{ [s]}, \quad M_p = 0.16 = 16\% \text{ [m]}, \quad \bar{t} = 1.11 \text{ [s]}, \quad \bar{c} = 0.55 \text{ [m]}$$

Análise de resposta transitória e de regime estacionário

Efeito da adição de zeros

- Considere as seguintes funções de transferência

$$H_1(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

$$H_2(s) = \frac{2(s+1.1)}{1.1(s+1)(s+2)} = \frac{2}{1.1}\left(\frac{0.1}{s+1} + \frac{0.9}{s+2}\right) = \frac{0.18}{s+1} + \frac{1.64}{s+2}$$

- O ganho DC de ambas funções são os mesmos.
- Perceba que o coeficiente do termo $(s+1)$ foi modificado, passando de 2 em $H_1(s)$ para 0.18 em $H_2(s)$.
- Se o zero tivesse sido em $s = -1$, então o polo teria sido cancelado.
- Considere o seguinte sistema

$$H(s) = \frac{[s/(\zeta\omega_n\alpha)] + 1}{(s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n) + 1}$$

- O zero está localizado em $s = -\zeta\omega_n\alpha = -\alpha\sigma$ com $\sigma = \zeta\omega_n$.
- Se α é grande, o zero estará longe do polo e terá pouco efeito na resposta.
- Se $\alpha \approx 1$, então o valor será próximo do valor da parte real do polo e é esperado haver um efeito significativo na resposta.

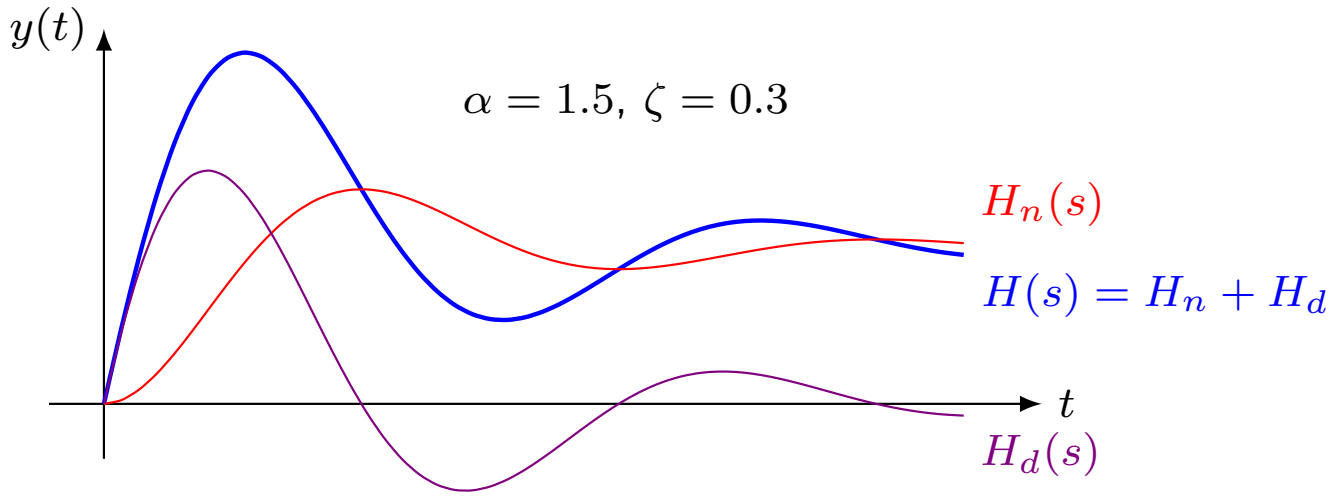
Análise de resposta transitória e de regime estacionário

Efeito da adição de zeros

- O efeito principal do zero é aumentar o sobressinal (overshoot) M_p.
- Suponha que $\omega_n = 1$, então $H(s)$ é dado por $H(s) = \dfrac{s/(\zeta\alpha) + 1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$.
- Equivalentemente:

$$H(s) = \underbrace{\frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}}_{H_n(s)} + \underbrace{\frac{1}{\alpha\zeta}\frac{s}{s^2 + 2\zeta s + 1}}_{H_d(s)}$$

- Note que $H_d(s)$ é o produto de $\frac{1}{\alpha\zeta}$ por s (derivador) vezes o termo $H_n(s)$.
- Portanto, $H_d(s)$ é uma constante vezes a derivada de $H_n(s)$.



Análise de resposta transitória e de regime estacionário

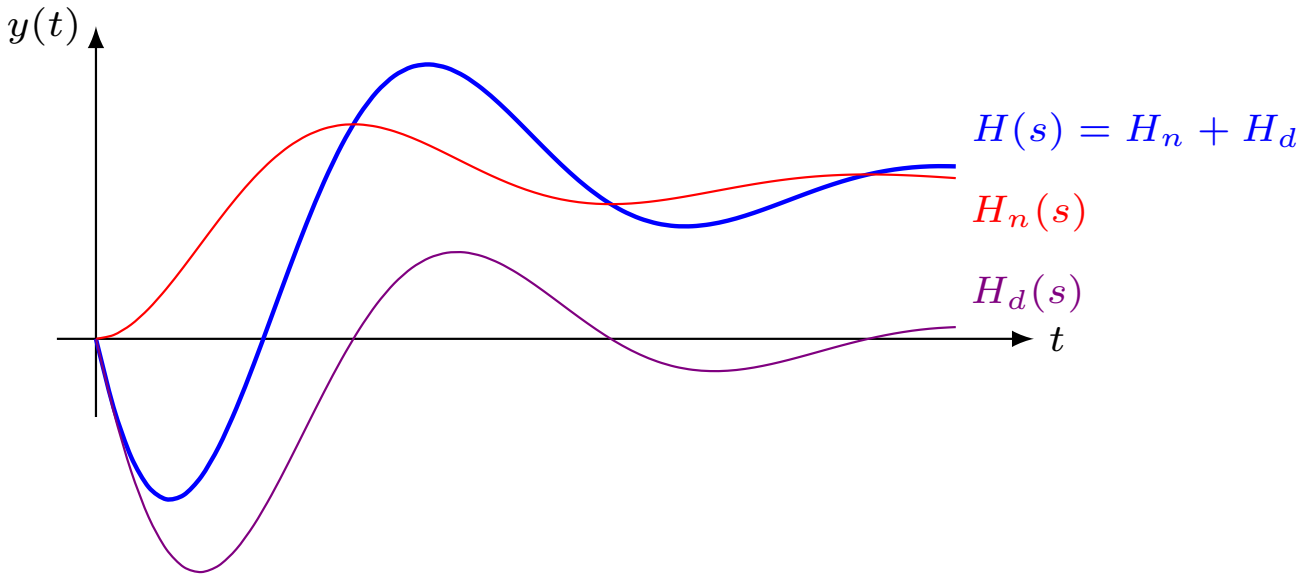
Efeito da adição de zeros

- Suponha que $\alpha < 0$ na planta $H(s)$ dada por

$$H(s) = \frac{s/(\alpha\zeta) + 1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

então o zero estará no semiplano direito do plano complexo.

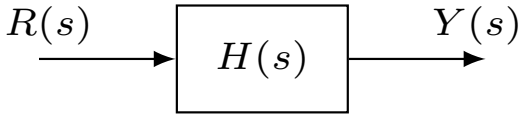
- Nesse caso o termo derivativo $H_d(s)$ contribui de forma negativa.
- Isso faz com que a resposta ao degrau tenha uma inclinação inicial negativa.



Análise de resposta transitória e de regime estacionário

Sistemas de ordem superior

- Considere o seguinte sistema



- A função de transferência em malha fechada é

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$
$$= K \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}, \quad n > m$$

- Assumindo que os polos são reais e distintos, a resposta ao degrau tem a forma

$$Y(s) = \frac{c_0}{s} + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s+p_i}$$

em que c_i é o resíduo do polo em $s = -p_i$.

- Se existir um zero próximo a um polo, o respectivo resíduo será pequeno.
- Um polo cujo resíduo seja pequeno contribuirá pouco para a resposta transitória.

Análise de resposta transitória e de regime estacionário

Sistemas de ordem superior

- Suponha que os polos de $Y(s)$ sejam constituídos de polos reais distintos e pares de polos complexos conjugado ($0 \leq \zeta_k < 1$).

- Nesse caso, a saída $Y(s)$ será composta por termos de primeira e segunda ordem:

$$Y(s) = \frac{c_0}{s} + \sum_{j=1}^{q} \frac{c_j}{s + p_j} + \sum_{k=1}^{r} \frac{b_k(s + \zeta_k \omega_{n_k}) + d_k \omega_{n_k} \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_{n_k} s + \omega_{n_k}^2}, \quad q + 2r = n$$

- A resposta $y(t)$ é dada por

$$y(t) = c_0 + \sum_{j=1}^{q} c_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^{r} b_k e^{-\zeta_k \omega_{n_k} t} \cos \omega_{n_k} \sqrt{1 - \zeta_k^2}\, t$$
$$+ \sum_{k=1}^{r} d_k e^{-\zeta_k \omega_{n_k} t} \sin \omega_{n_k} \sqrt{1 - \zeta_k^2}\, t, \qquad t \geq 0$$

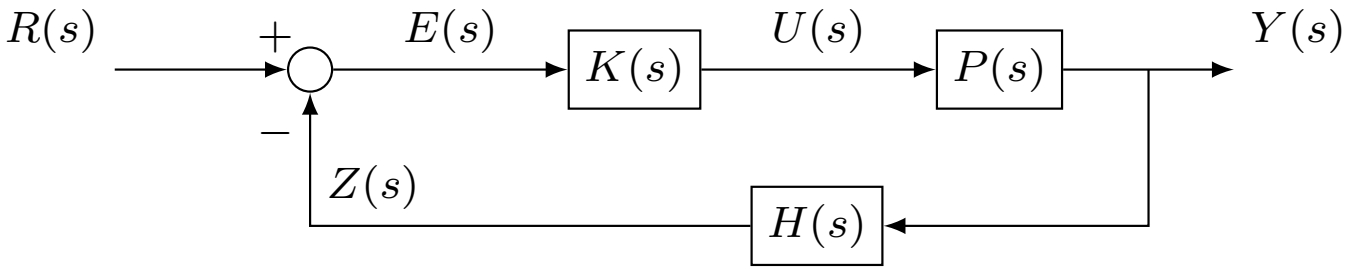
- Os polos que têm efeitos dominantes na resposta transitória são os *polos dominantes de malha fechada*.

- Os polos próximos do eixo $\mathrm{j}\omega$ podem ser considerados dominantes se as relações entre suas partes reais forem maiores do que 5 e não houver zeros na proximidade.

Malha padrão de controle

Notação

- Considere o diagrama de blocos da figura abaixo.



- A função de transferência em malha aberta $L(s)$ é dada por

$$L(s) = \frac{Z(s)}{R(s)} = HPK$$

- A função de transferência do ramo direto $G(s)$ é dada por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = PK$$

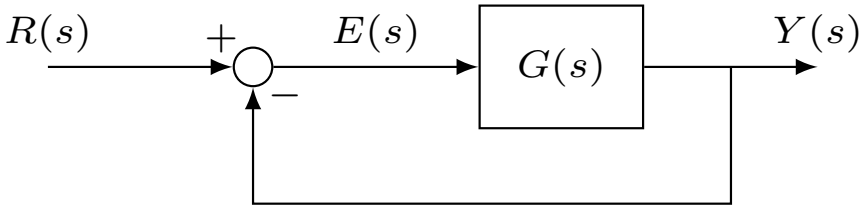
- A função de transferência em malha fechada $T(s)$ é dada por

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{PK}{1 + HPK} = \frac{G(s)}{1 + L(s)}$$

Análise do erro estacionário

Tipo do sistema

- Considere o seguinte sistema em malha fechada:



- Com a função de transferência dada por

$$G(s) = \frac{K}{s^N} \frac{(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_p s + 1)}$$

- O sistema será: do tipo 0 se $N = 0$; do tipo 1 se $N = 1$; do tipo 2 se $N = 2$; etc.

- Para esse diagrama, o sinal de erro $E(s) = R(s) - Y(s)$ é dado por

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

- Portanto, o erro estacionário e_{ss} é dado por

$$e_{\text{ss}} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)} R(s)$$

Análise do erro estacionário

Tipo do sistema: constante de posição K_P

- Para a entrada degrau $R(s) = 1/s$, o erro estacionário é dado por

$$e_{\text{ss}} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} G(s)}$$

- Definindo a constante K_P por

$$K_P = \lim_{s \to 0} G(s) = G(0)$$

tem-se

$$e_{\text{ss}} = \frac{1}{1 + K_P}$$

- Dependendo do tipo do sistema, tem-se:
  1. para sistemas do tipo 0, $N = 0$, a constante K_P é

$$K_P = G(0) = K$$

  2. para sistemas do tipo N, com $N \geq 1$, a constante K_P é

$$K_P = \lim_{s \to 0} \frac{K}{s^N} \frac{(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_p s + 1)} = \infty$$

- Portanto, o erro estacionário será:
  - $e_{\text{ss}} = \frac{1}{1+K}$, para sistemas do tipo 0;
  - $e_{\text{ss}} = 0$, para sistemas do tipo 1 ou maior.

Análise do erro estacionário

Tipo do sistema: constante de velocidade K_v

- Para a entrada rampa $R(s) = 1/s^2$, o erro estacionário é dado por

$$e_{\text{ss}} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG(s)}$$

- Definindo a constante $K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)$, tem-se $e_{\text{ss}} = 1/K_v$.
- Dependendo do tipo do sistema, tem-se:
  1. para sistemas do tipo 0, $N = 0$, a constante K_v é

$$K_v = \lim_{s\to 0} sK \frac{(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)} = 0$$

  2. para um sistema do tipo 1, $N = 1$, a constante K_v é

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\frac{K}{s} \frac{(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)} = K$$

  3. para um sistema do tipo 2, ou maior ($N \geq 2$)

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\frac{K}{s^N} \frac{(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)} = \infty$$

- Portanto, o erro estacionário será:
  - $e_{\text{ss}} = \frac{1}{K_v} = \infty$, para sistemas do tipo 0;
  - $e_{\text{ss}} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K}$, para sistemas do tipo 1;
  - $e_{\text{ss}} = 0$, para sistemas do tipo 2 ou maior.

Análise do erro estacionário

Tipo do sistema: constante de aceleração K_a

- Para a entrada parábola $R(s) = 1/s^3$, o erro estacionário é dado por

$$e_{\text{ss}} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)} \frac{1}{s^3} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2 + s^2 G(s)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s^2 G(s)}$$

- Definindo a constante K_a como

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$$

obtém-se $e_{\text{ss}} = 1/K_a$. Dependendo do tipo do sistema, tem-se

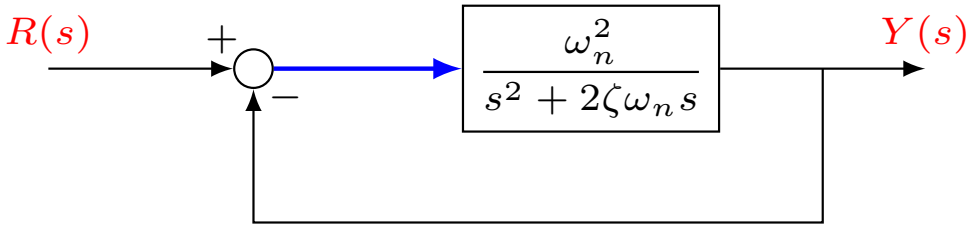
Tipo do sistema	K_a
0	0
1	0
2	K
$N \geq 3$	∞

- Portanto, o erro estacionário será:
  - $e_{\text{ss}} = \infty$, para sistemas do tipo 0 e 1;
  - $e_{\text{ss}} = \frac{1}{K}$, para sistemas do tipo 2;
  - $e_{\text{ss}} = 0$, para sistemas do tipo 3 ou maior.

Análise do erro estacionário

Exemplo

- Exemplo: Considere o diagrama em malha fechada abaixo.



1. Para uma rampa, calcule o erro entre $R(s)$ e $Y(s)$, ou seja, $E(s) = R(s) - Y(s)$.

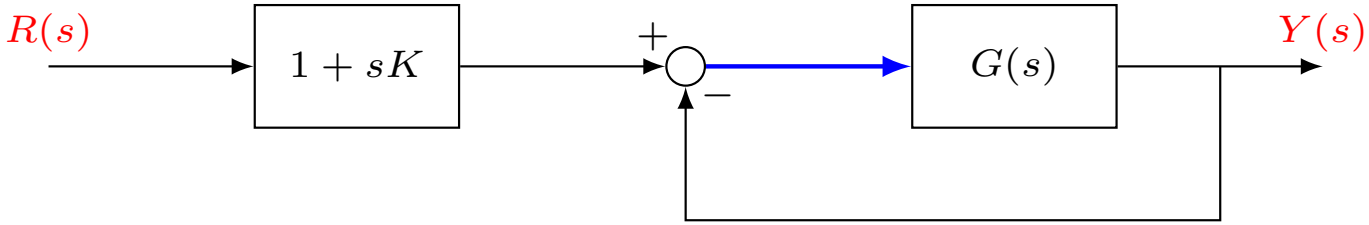
   Primeiramente, note que a planta $G(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$ é do tipo 1, com K_v dado por

   $$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{\omega_n}{2\zeta}$$

   Portanto, haverá um erro estacionário a entrada rampa dado por

   $$e_{\text{ss}} = \frac{1}{K_v} = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

2. Elimine esse erro adicionando um prefiltro de acordo com o diagrama abaixo.



   Observe que $E(s)$ já não representa o mesmo ponto (sinal) nos dois diagramas.

Análise do erro estacionário

Exemplo

Calculando o erro $E(s)$, entre a entrada $R(s)$ e a saída $Y(s)$, tem-se

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s)\left(1 - \frac{G(s)}{1+G(s)}(1+K\,s)\right)$$

Portanto

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 - s\,KG(s)}{1+G(s)} = \frac{1 - s\,K\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s}}{1+\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s}}$$

Equivalentemente

$$E(s) = \frac{s^2 + s\,(2\zeta\omega_n - K\omega_n^2)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}R(s)$$

Calculando o erro estacionário a entrada rampa $R(s) = 1/s^2$, tem-se

$$e_{\text{ss}} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^2}\frac{s^2+s(2\zeta\omega_n - K\omega_n^2)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

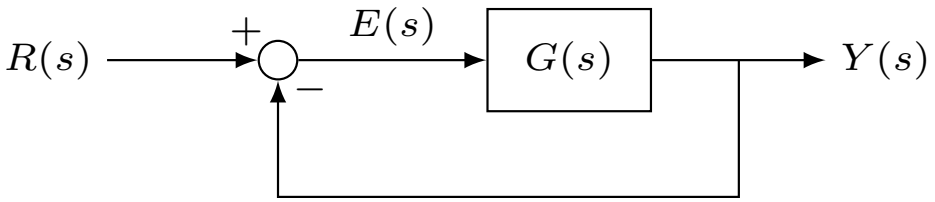
Assim

$$e_{\text{ss}} = \frac{2\zeta\omega_n - K\omega_n^2}{\omega_n^2} = \frac{2\zeta}{\omega_n} - K = 0 \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

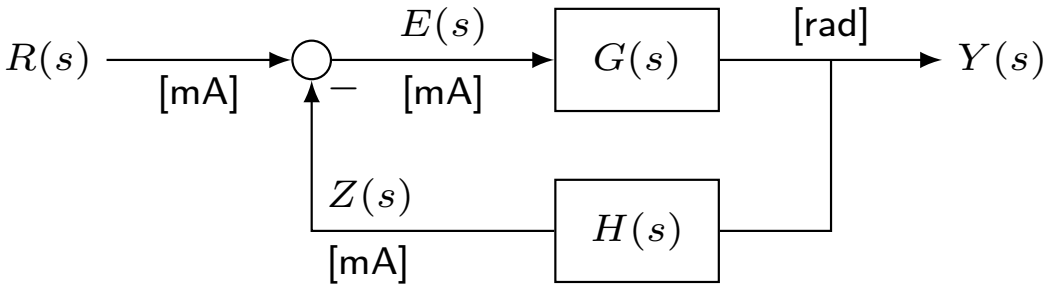
Análise do erro estacionário

Adição da dinâmica do sensor

- Para o diagrama abaixo, foi visto que o sinal de erro $E(s) = R(s) - Y(s)$ e portanto a saída Y são completamente determinados pelo tipo da planta $G(s)$.



- Porém, em várias aplicações práticas, o sinal de realimentação é fornecido por um sensor cuja dinâmica é descrita por uma função de transferência $H(s)$.



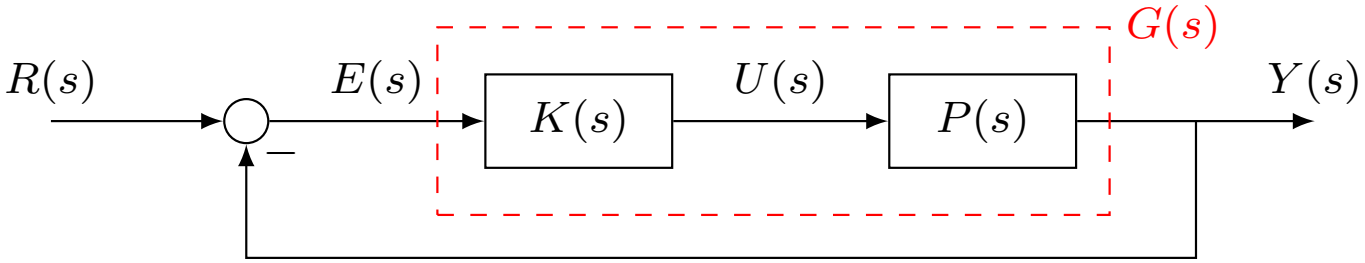
- No mais, o diagrama de blocos em geral deve considerar a unidade física dos sinais envolvidos, como na figura acima, em que $H(s)$ converte de [rad] para [mA].

- Ao contrario do caso anterior, o sinal E agora é $E = R - Z$ e é preciso uma análise mais detalhada de como o tipo do sistema influenciará os sinais E e Y.

Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Funções de transferência do sistema

- Considere o diagrama de blocos da figura abaixo.



- A função de transferência do ramo direto $G(s)$ é dada por

$$G(s) = K(s)P(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

- A função de transferência em malha fechada $T(s)$ é dada por

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{n(s)}{d(s) + n(s)}$$

- O sinal de erro $E(s)$ é dado por

$$E(s) = R(s) - Y(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s) = \frac{d(s)}{d(s) + n(s)} R(s)$$

Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Leis básicas de controle

- A ação de controle proporcional (P) é dada por

$$u(t) = K_P\, e(t) \qquad \Longrightarrow \qquad K(s) = K_P$$

- A ação de controle integral (I) é dada por

$$u(t) = K_I \int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad \Longrightarrow \qquad K(s) = \frac{K_I}{s}$$

- A ação de controle derivativo (D) é dada por

$$u(t) = K_D \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \Longrightarrow \qquad K(s) = K_D s$$

- A ação de controle proporcional-integral-derivativo (PID) é dada por

$$u(t) = K_P\, e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau + K_D \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$$

Assim

$$K(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Ação de controle proporcional (P)

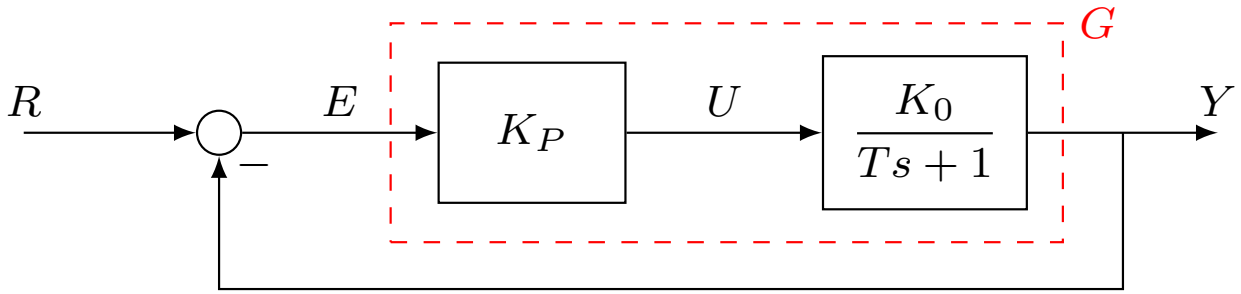
- A ação de controle proporcional (P) é dada por

$$u(t) = K_P\, e(t) \qquad \Longrightarrow \qquad K(s) = K_P$$

- Note que $e(t) \to 0$ implica que $u(t) \to 0$.
- Considere que a planta é de 1ª ordem, dada por

$$P(s) = \frac{K_0}{Ts+1}$$

- O diagrama fica sendo:



- O ramo direto $G(s)$ e a malha fechada $T(s)$ são dados por

$$G(s) = \frac{K_P K_0}{Ts+1} \qquad \text{e} \qquad T(s) = \frac{K_P K_0}{Ts+1+K_P K_0} = \frac{K}{\tau s+1}$$

com $K = K_P K_0/(K_P K_0 + 1)$ e $\tau = T/(K_P K_0 + 1)$.

Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Ação de controle proporcional (P)

- Note que o controlador K_P não alterou o tipo do sistema que permaneceu sendo 0.
- Assim, o erro estacionário ao degrau $R(s) = 1/s$ é dado por

$$e_{\text{ss}} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + G(0)} = \frac{1}{1 + K_P K_0}$$

- Claramente, quanto maior o ganho proporcional K_P, menor será o erro estacionário.
- A resposta ao degrau é dada por: $y(t) = K\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$
- Note que $K_P \to \infty$ implica:

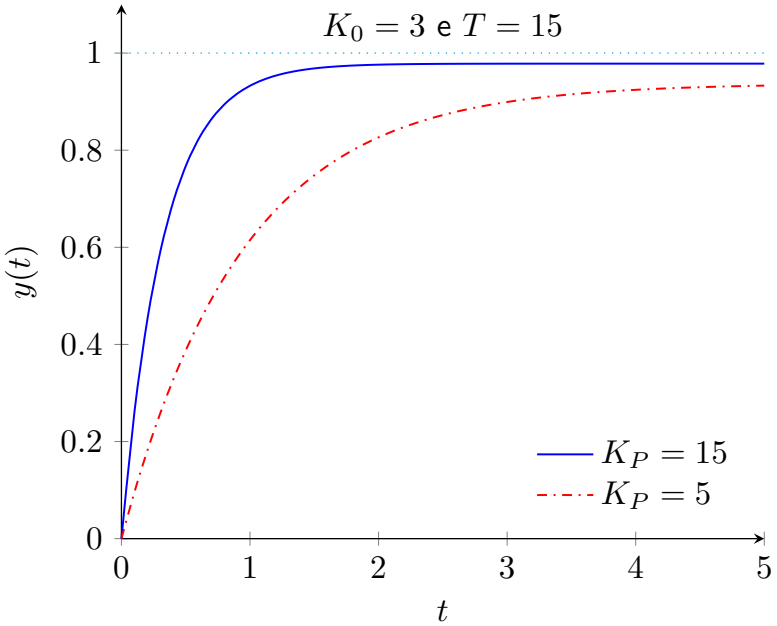
$$K \to 1 \qquad \text{e} \qquad \tau \to 0$$

- O polo, em malha aberta, dado por

$$s = -1/T$$

moveu, em malha fechada, para

$$s = -1/T - K_P K_0/T$$



Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Ação de controle proporcional (P)

- Considere agora que a planta é de 2ª ordem, dada por

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- A função de transferência do ramo direto é dada por

$$G(s) = \frac{K_P}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- A função de transferência em malha fechada é dada por

$$T(s) = \frac{K_P}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + (K_P + \omega_n^2)}$$

- Reescrevendo a função de transferência na forma padrão de 2ª ordem:

$$T(s) = \frac{K_P}{\bar{\omega}_n^2} \frac{\bar{\omega}_n^2}{s^2 + 2\bar{\zeta}\bar{\omega}_n s + \bar{\omega}_n^2}$$

os novos fator de amortecimento $\bar{\zeta}$ e frequência natural $\bar{\omega}_n$ são dados por

$$\bar{\zeta} = \frac{\zeta\omega_n}{\sqrt{K_P + \omega_n^2}} \qquad \text{e} \qquad \bar{\omega}_n = \sqrt{K_P + \omega_n^2}$$

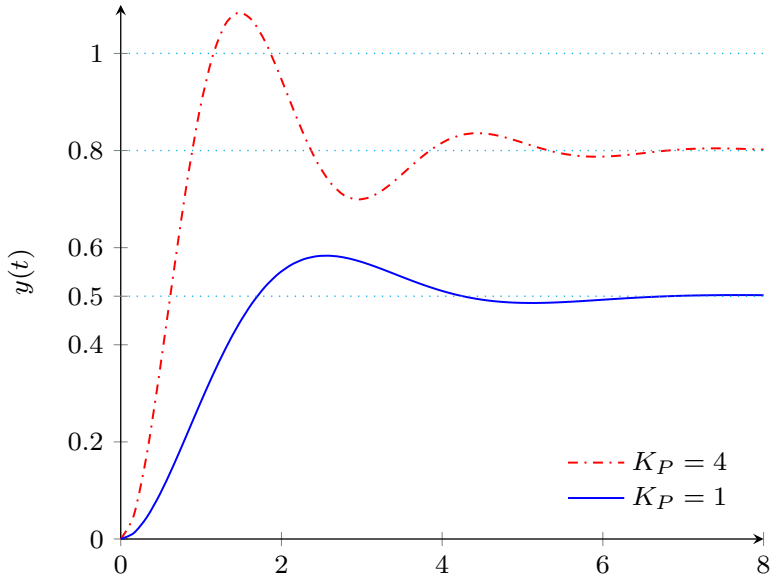
Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Ação de controle proporcional (P)

- Observa-se novamente que o ganho proporcional K_P não alterou o tipo do sistema nem a ordem do sistema.
- Também fica claro que quanto maior for o ganho proporcional K_P, maior será a frequência natural $\bar{\omega}_n$, porém menor será o fator de amortecimento $\bar{\zeta}$.
- O sinal de erro $E(s)$ e o erro estacionário ao degrau e_{ss} são dados por

$$E(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + (K_P + \omega_n^2)} R(s) \qquad \rightarrow \qquad e_{\text{ss}} = \frac{\omega_n^2}{K_P + \omega_n^2}$$

- O gráfico abaixo apresenta a resposta ao degrau para $\omega_n = 1$ e $\zeta = 0.7$.



Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Ação de controle integral (I)

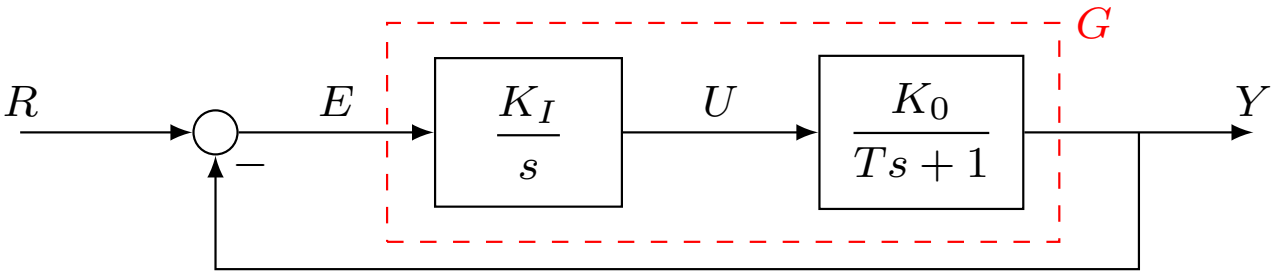
- Ação de controle integral (I) é dada por

$$u(t) = K_I \int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad \Longrightarrow \qquad K(s) = \frac{K_I}{s}$$

- Note que $e(t) \to 0$ não implica necessariamente que $u(t) \to 0$.
- Considere que a planta é de 1ª ordem, dada por

$$P(s) = \frac{K_0}{Ts+1}$$

- O diagrama fica sendo:



- A função de transferência do ramo direto é dada por

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}, \qquad K = K_0 K_I$$

Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Ação de controle integral (I)

- A função de transferência em malha fechada é dada por

$$T(s) = \frac{K}{s(Ts+1)+K} = \frac{K/T}{s^2 + s/T + K/T}, \qquad K = K_0 K_I$$

- Reescrevendo a função de transferência na forma padrão de 2ª ordem:

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

os novos fator de amortecimento ζ e frequência natural ω_n são dados por

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{KT}} \qquad \text{e} \qquad \omega_n^2 = \frac{K}{T}$$

- O sinal de erro $E(s)$ é dado por

$$E(s) = \frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+K_0K_I} R(s)$$

- Como o sistema é do tipo 1, o erro estacionário à rampa será

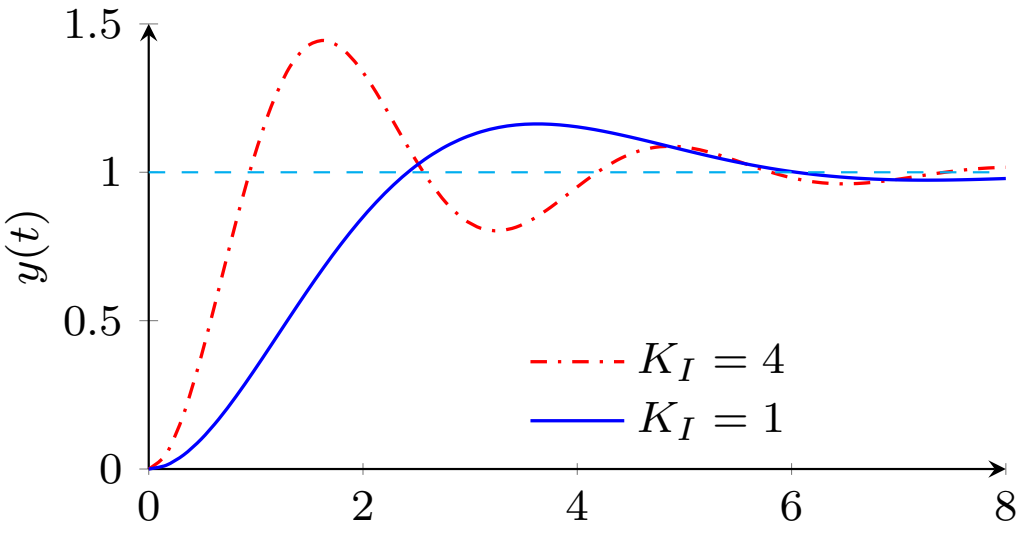
$$e_{\text{ss}} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{1}{K_0K_I}$$

- Portanto, quanto maior for o ganho K_I, menor será o erro estacionário.

Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Ação de controle integral (I)

- Percebe-se que quanto maior K_I, maior será ω_n e menor será o amortecimento.
- Note que a ação integral alterou o tipo do sistema e a ordem do sistema.
- O gráfico abaixo apresenta a resposta ao degrau para $K_0 = 1$ e $T = 1$.



- Exercício: Analise o efeito considerando uma planta de 2ª ordem, dada por

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Ação de controle proporcional-integral (PI)

- Ação de controle proporcional-integral (PI) é dada por

$$u(t) = K_P\, e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad \Longrightarrow \qquad K(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s}$$

- Considere que a planta é de 1ª ordem, dada por

$$P(s) = \frac{K_0}{Ts + 1}$$

- Assim, a função de transferência do ramo direto é dada por

$$G(s) = \frac{K_0(K_P s + K_I)}{s(Ts + 1)}$$

- A função de transferência em malha fechada é dada por

$$T(s) = \frac{K_0(K_P s + K_I)}{Ts^2 + (K_0 K_P + 1)s + K_0 K_I}$$

- Note que o fator K_P adicionou um zero ao sistema em $s = -K_I/K_P$.
- Ação integral aumentou o tipo e a ordem do sistema.

Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Ação de controle proporcional-integral (PI)

- Como o sistema agora é do tipo 1, o erro estacionário à rampa é dado por

$$e_{\text{ss}} = \frac{1}{K_v}, \qquad \text{com} \quad K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = K_0 K_I$$

- Pode-se escolher o ganho K_I de forma a se obter um aceitável e_{ss}.
- Os polos em malha fechada são as raízes do polinômio característico dado por

$$s^2 + \frac{(K_0 K_P + 1)s}{T} + \frac{K_0 K_I}{T} = 0$$

- Assim, também é possível projetar K_P e K_I de forma a se ter uma equação característica em malha fechada com ζ e ω_n desejáveis:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

- Igualando ambos os polinômios, obtém-se

$$K_I = \frac{T\omega_n^2}{K_0} \qquad \text{e} \qquad K_P = \frac{2\zeta\omega_n T - 1}{K_0}$$

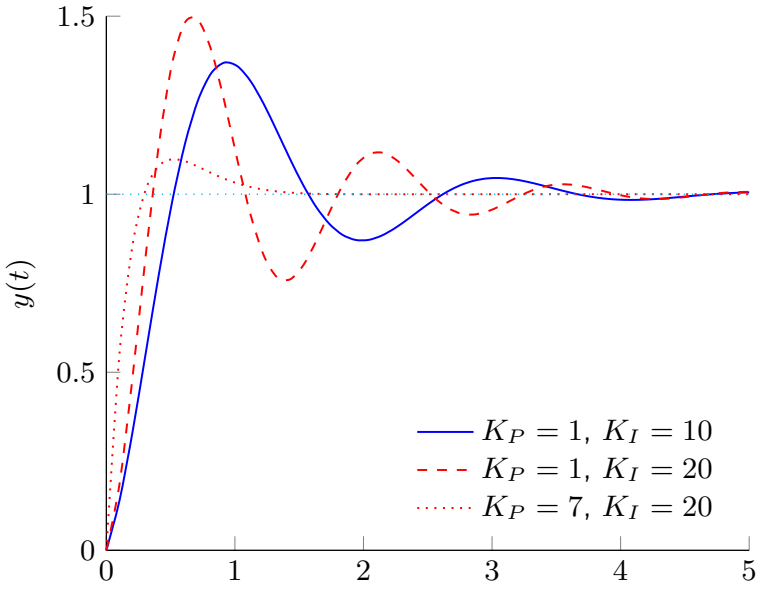
Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Ação de controle proporcional-integral (PI)

- Por outro lado, definindo-se valores para K_P e K_I, o sistema em malha fechada terá uma frequência natural e um fator de amortecimento respectivamente dados por

$$\omega_n = \sqrt{K_0 K_I / T} \qquad \text{e} \qquad \zeta = \frac{1 + K_0 K_P}{2\sqrt{K_0 K_I T}}$$

- Assim, quanto maior for o ganho integral K_I, maior será a frequência natural ω_n e menor será o fator de amortecimento ζ.
- Porém, quanto maior for o ganho proporcional K_P, maior será o amortecimento.
- O gráfico abaixo apresenta a resposta ao degrau para $K_0 = 1$ e $T = 1$.



Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Ação de controle proporcional-derivativo (PD)

- Ação de controle proporcional-derivativo (PD) é dada por

$$u(t) = K_P\, e(t) + K_D \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \Longrightarrow \qquad K(s) = K_P + K_D s$$

- Considere que a planta é de 1ª ordem, dada por

$$P(s) = \frac{K_0}{Ts + 1}$$

- A função de transferência do ramo direto é dada por

$$G(s) = \frac{K_0(K_P + K_D s)}{Ts + 1}$$

- A função de transferência em malha fechada é dada por

$$T(s) = \frac{K_0(K_P + K_D s)}{(K_0 K_D + T)s + K_0 K_P + 1} = \frac{K(1 + sK_D/K_P)}{\tau s + 1}$$

  com K, e τ dados por

$$K = \frac{K_0 K_P}{K_0 K_P + 1} \qquad \text{e} \qquad \tau = \frac{K_0 K_D + T}{K_0 K_P + 1}$$

- Se $K_0 K_P \ggg 1$, então $K \to 1$. Ademais, se $K_0 K_D \ggg T$, então $\tau \to K_D/K_P$.

Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

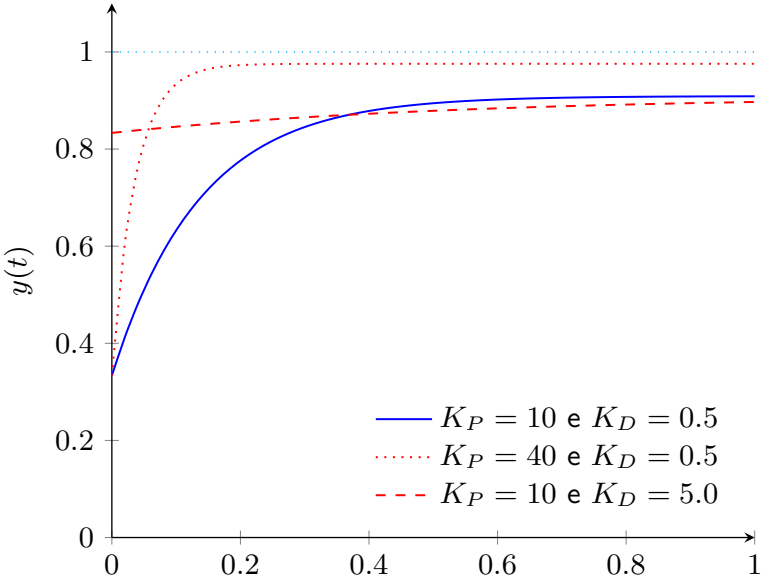
Ação de controle proporcional-derivativo (PD)

- Claramente, o tipo e a ordem do sistema não se alteraram. Porém houve a adição de um zero em $s = -K_P/K_D$.

- O sinal de erro $E(s)$ e o erro estacionário ao degrau e_{ss} são dados por

$$E(s) = \frac{Ts+1}{(K_0K_D+T)s+K_0K_P+1}R(s) \qquad \rightarrow \qquad e_{\text{ss}} = \frac{1}{K_0K_P+1}$$

- O gráfico abaixo apresenta a resposta ao degrau para $K_0 = 1$ e $T = 1$.

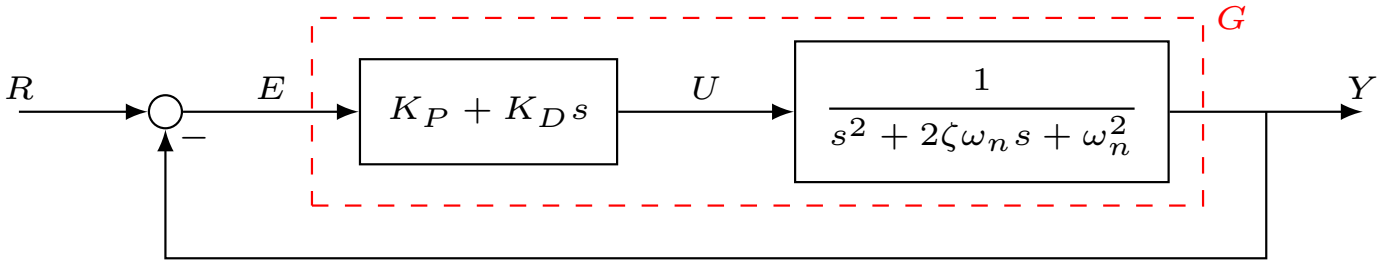


- Perceba que pelo Teorema do valor inicial, $y(0) = K_0K_D/(K_0K_D+T)$.

Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Ação de controle proporcional-derivativo (PD)

- Considere agora que a planta é de 2ª ordem do tipo 0.



- A função de transferência em malha fechada é dada por

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_P + K_D s}{s^2 + (2\zeta\omega_n + K_D)s + K_P + \omega_n^2}$$

- Reescrevendo $T(s)$ com o polinômio característico na forma padrão de 2ª ordem:

$$T(s) = \frac{K_P + K_D s}{s^2 + 2\bar{\zeta}\bar{\omega}_n s + \bar{\omega}_n^2}$$

os novos fator de amortecimento $\bar{\zeta}$ e frequência natural $\bar{\omega}_n$ são dados por

$$\bar{\zeta} = \frac{2\zeta\omega_n + K_D}{2\sqrt{K_P + \omega_n^2}} \qquad \text{e} \qquad \bar{\omega}_n = \sqrt{K_P + \omega_n^2}$$

- Perceba que a ação derivativa tem o efeito de aumentar o amortecimento do sistema.

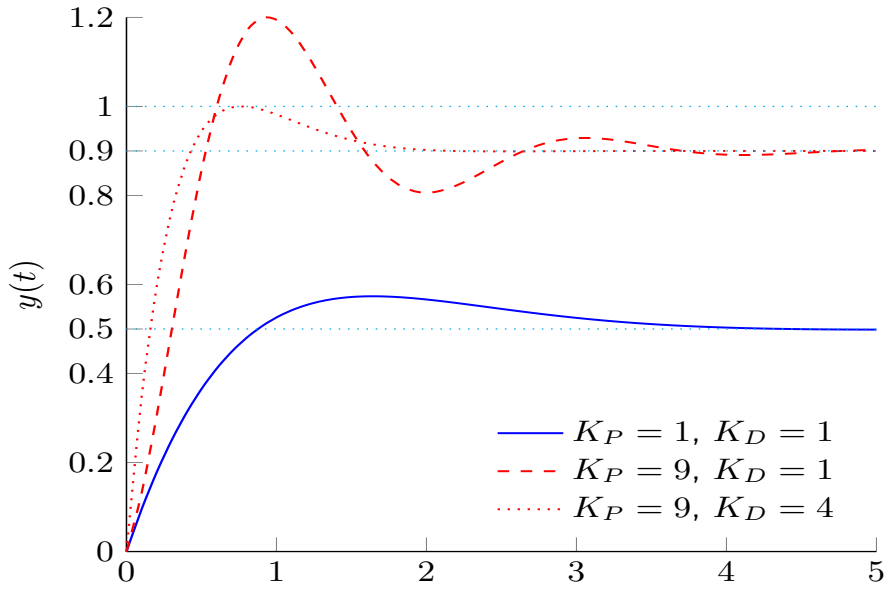
Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Ação de controle proporcional-derivativo (PD)

- Também fica claro que quanto maior for o ganho proporcional K_P, maior será a frequência natural ω_n, porém menor será o fator de amortecimento ζ.
- Novamente, o tipo e a ordem do sistema não foram alterados. Porém foi incluído um zero em $s = -K_P/K_D$.
- O sinal de erro $E(s)$ e o erro estacionário ao degrau e_{ss} são dados por

$$E(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n + K_D)s + K_P + \omega_n^2} R(s) \qquad \rightarrow \qquad e_{\text{ss}} = \frac{\omega_n^2}{K_P + \omega_n^2}$$

- O gráfico abaixo apresenta a resposta ao degrau para $\omega_n = 1$ e $\zeta = 0.6$.



Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Ação de controle proporcional-integral-derivativo (PID)

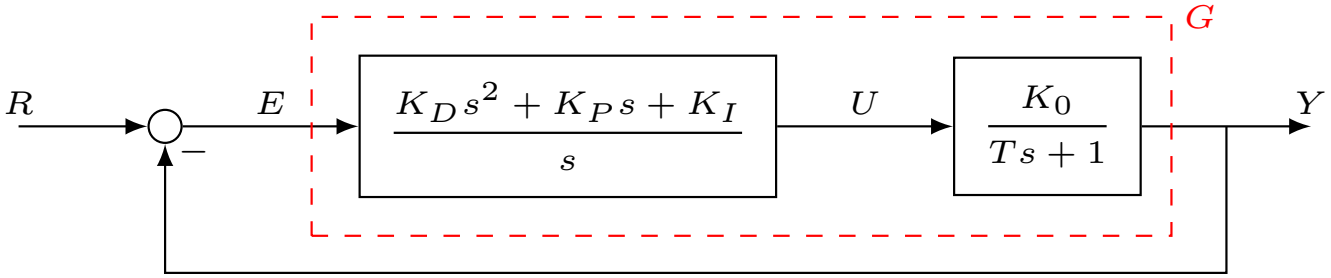
- Ação de controle proporcional-integral-derivativo (PID) é dada por

$$u(t) = K_P\, e(t) + K_D \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} + K_I \int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau \quad \Longrightarrow \quad K(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

- Considere que a planta é de 1ª ordem, dada por

$$P(s) = \frac{K_0}{Ts + 1}$$

- O diagrama fica sendo:



- A função de transferência do ramo direto $G(s)$ é dada por

$$G(s) = \frac{K_0(K_D s^2 + K_P s + K_I)}{s(Ts + 1)}$$

- Devido à ação integral, o tipo do sistema aumentou como esperado.

Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Ação de controle proporcional-integral-derivativo (PID)

- Como o sistema agora é do tipo 1, o erro estacionário à rampa é dado por

$$e_{\text{ss}} = \frac{1}{K_v}, \qquad \text{com } K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = K_0 K_I$$

- O ganho K_I pode ser escolhido de forma a se obter um aceitável e_{ss}.
- A função de transferência em malha fechada é dada por

$$T(s) = \frac{K_0(K_D s^2 + K_P s + K_I)}{(K_0 K_D + T)s^2 + (K_0 K_P + 1)s + K_0 K_I}$$

- É possível projetar os ganhos de forma a se ter um polinômio característico desejável:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

com

$$2\zeta\omega_n = \frac{(K_0 K_P + 1)}{(K_0 K_D + T)} \qquad \text{e} \qquad \omega_n^2 = \frac{K_0 K_I}{(K_0 K_D + T)}$$

- Para dados K_I, ζ e ω_n, os ganhos K_P e K_D são dados por

$$K_P = \frac{2\zeta K_0 K_I - \omega_n}{K_0 \omega_n} \qquad \text{e} \qquad K_D = \frac{K_0 K_I - T\omega_n^2}{K_0 \omega_n^2}$$

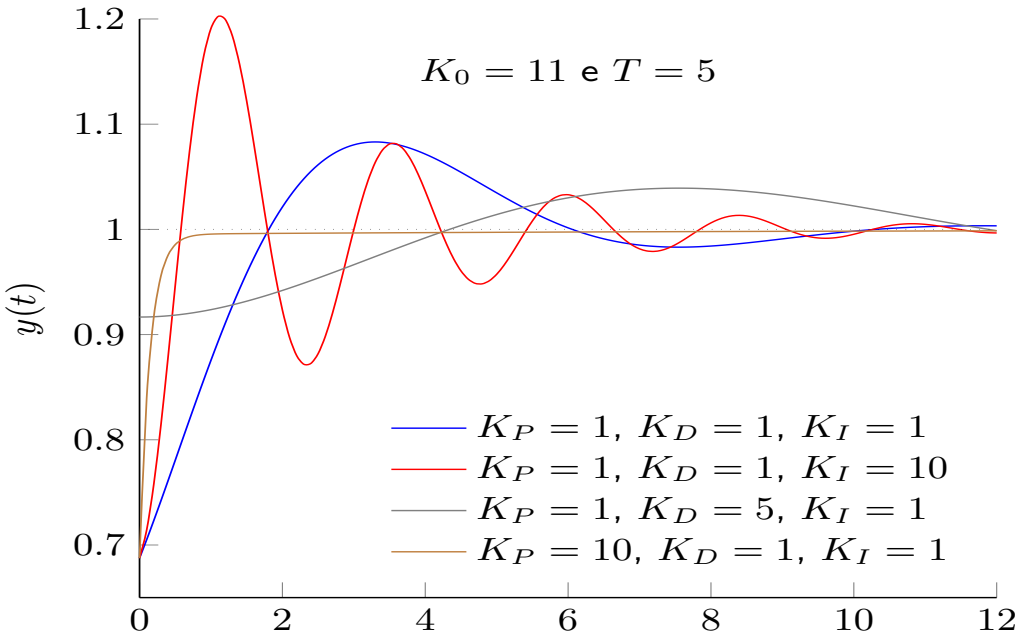
Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Ação de controle proporcional-integral-derivativo (PID)

- Os parâmetros ζ e ω_n em função dos ganhos são dados por

$$\omega_n = \frac{\sqrt{K_0 K_I}}{\sqrt{K_0 K_D + T}} \qquad \text{e} \qquad \zeta = \frac{1 + K_0 K_P}{2\sqrt{K_0 K_I}\sqrt{K_0 K_D + T}}$$

- Observa-se que K_I torna o sistema mais rápido enquanto K_D tem o efeito oposto.
- O ganho K_P aumenta ζ. Já, K_D e K_I tornam o sistema menos amortecido.

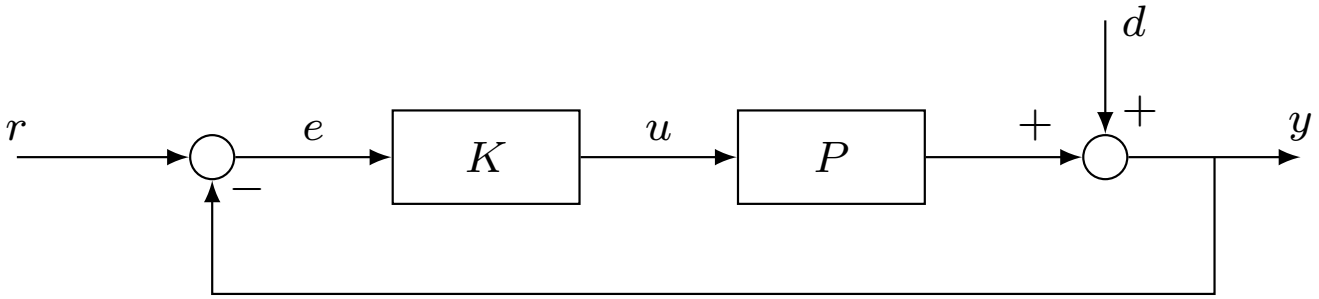


- Perceba que pelo Teorema do valor inicial, $y(0) = K_0 K_D/(K_0 K_D + T)$.

Efeito das ações de controle no desempenho do sistema

Especificações de desempenho

- Considere o sistema de controle abaixo.



- Em geral, um controlador K deve ser projetado para que o sistema em malha fechada satisfaça um dado conjunto de "especificações de desempenho":
  1. Regime permanente: a saída y deve rastrear (seguir) a referência r, em regime permanente ($t \to \infty$), com a precisão desejada.
  2. Resposta transitória: a saída y deve apresentar tempo de subida, máximo sobressinal e tempo de acomodação como especificados.
  3. Rejeição de distúrbios: o efeito do distúrbio d sobre a saída y deve ser suficientemente atenuado (rejeitado) pelo sistema de controle.
  4. Esforço do controlador: a lei de controle u deve-se manter limitada em função de restrições sobre o atuador.
  5. Sensibilidade a variações de parâmetros: as especificações de desempenho devem permanecer satisfeitas a despeito de variações em P e K.