

ANÁLISE LINEAR DE SISTEMAS

J. F. Camino

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
Camino@fem.unicamp.br

Apostila para a disciplina ES601

Campinas, 10 de janeiro de 2024

Sumário

1	Introdução	3
2	Conceitos de Modelagem de Sistemas e Equações Diferenciais	6
2.1	Modelagem de sistemas elétricos usando equações diferenciais	6
2.2	Modelagem de sistemas mecânicos usando equações diferenciais	16
2.3	Analogia entre sistemas mecânicos e elétricos	28
2.4	Propriedades de sistemas dinâmicos	28
2.5	Exercícios	30
3	Transformada de Laplace	40
3.1	Transformada de funções básicas	40
3.2	Propriedades da transformada de Laplace	43
3.3	A inversa da transformada de Laplace	46
3.4	Resolução de equações diferenciais usando a transformada de Laplace	49
3.5	Resposta a uma excitação qualquer	51
3.6	Função de transferência	52
3.7	Conceitos de estabilidade	53
3.8	Exercícios	56
4	Sistemas e Sinais Discretos	64
4.1	Definição de alguns sinais discretos	64
4.2	Propriedades de sinais discretos	66
4.3	Sistemas dinâmicos discretos	67
4.4	Propriedades de sistemas discretos	75
4.5	Exercícios	76
5	Transformada \mathcal{Z}	79
5.1	Transformada de funções básicas	79
5.2	Propriedades da transformada \mathcal{Z}	80
5.3	A inversa da transformada \mathcal{Z}	82
5.4	Resolução de equações de diferenças usando a transformada \mathcal{Z}	85
5.5	Resposta a uma excitação qualquer	87
5.6	Função de transferência	89
5.7	Conceitos de estabilidade	90

5.8	Equivalente discreto da função de transferência contínua	93
5.9	Exercícios	96
6	Análise de Fourier	100
6.1	Série de Fourier	100
6.2	Transformada de Fourier	107
6.3	Pseudotransformada de Fourier	109
6.4	Função de resposta em frequência	111
6.5	Espectro e Aliasing	118
6.6	Exercício	122
7	Análise no Espaço de Estado	127
7.1	Representação no espaço de estado	127
7.2	Solução homogênea da equação no espaço de estado	131
7.3	Solução da equação no espaço de estado não homogênea	134
7.4	Representação no espaço de estado: caso discreto	136
7.5	Transformação de similaridade	141
7.6	Polos e estabilidade assintótica	143
7.7	Forma canônica controlável	144
7.8	Forma canônica observável	147
7.9	Forma canônica de Jordan	149
7.10	Cancelamento de polos e zeros	152
7.11	Exercícios	153
8	Referências Bibliográficas	159
8.1	Dinâmica, modelagem e vibrações	159
8.2	Fundamentos matemáticos e equações diferenciais	159
8.3	Análise linear e controle de sistemas dinâmicos	159
8.4	Análise de Fourier	159
A	Preliminares Matemáticos	160
A.1	Funções de variáveis complexas	160
A.2	Equações diferenciais ordinárias lineares	162
A.3	Matriz fundamental	163
A.4	Autovalores e autovetores	165
A.5	Aproximação de Padé	172
A.6	Inversa da transformada \mathcal{Z} usando métodos computacionais	173
A.7	Produto interno e normas de sinais	175
A.8	Tabela de transformadas de Laplace	178
A.9	Transformada bilateral de Laplace	178
A.10	Operações básicas com diagramas de blocos	180
A.11	Simplificação de diagramas de blocos	181
A.12	Realização de sistemas dinâmicos	182
A.13	Simulação numérica	184

Capítulo 1

Introdução

Este material foi elaborado para servir como base introdutória ao estudo de análise linear de sistemas nos cursos de graduação em Engenharia de Controle e Automação, Mecânica e Mecatrônica, e tem o objetivo é apresentar de forma clara, concisa e acessível os conceitos fundamentais da análise linear de sistemas dinâmicos, utilizando a terminologia adotada nessa área. Embora influenciado pelos grandes avanços e extensa literatura no campo, este material não pretende abranger toda a complexidade do assunto. A intenção é proporcionar ao leitor uma compreensão sólida dos princípios essenciais.

Os fundamentos da análise linear de sistemas remontam ao século XVIII, quando pioneiros como Pierre-Simon Laplace e Jean-Baptiste Joseph Fourier lançaram as bases da disciplina com suas contribuições matemáticas. Laplace introduziu os fundamentos da transformada integral que agora leva o seu nome e que se tornou uma ferramenta matemática poderosa na análise linear de sistemas. A análise de Fourier também foi um marco decisivo, permitindo a análise no domínio da frequência de sinais e sistemas. Esses avanços evoluíram ao longo dos séculos subsequentes, trazendo à cena nomes notáveis, a exemplo de Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, cujos métodos revolucionários trouxeram contribuições significativas para a análise de estabilidade de sistemas dinâmicos. Já no século XX, engenheiros visionários, como Harry Nyquist e Hendrik Bode, impulsionaram a área a novos horizontes, especialmente na eletrônica e na engenharia de controle.

Na engenharia moderna, a análise linear de sistemas desempenha um papel crucial, permitindo a compreensão aprofundada de uma variedade de sistemas físicos em campos que abrangem eletrônica, telecomunicações, controle de processos industriais, robótica, veículos autônomos e muitos outros. Ela possibilita a compreensão e o aprimoramento do comportamento desses sistemas. Através da modelagem matemática, engenheiros e cientistas podem capturar complexidades, transformando observações do mundo real em linguagem matemática. Isso permite prever e otimizar o desempenho antes da fabricação de um produto, economizando tempo e recursos.

A análise de sistemas é uma abordagem inestimável para melhorar sistemas de engenharia, sendo fundamental para as aplicações modernas. Tais sistemas, constituídos pela interconexão de componentes, dispositivos ou subsistemas, operam em conjunto para atingir um objetivo comum, e podem servir a uma ampla gama de aplicações, incluindo processamento de sinais, sistemas de comunicação, motores, veículos e processos químicos. Nessa perspectiva, um sistema é entendido como um conjunto de elementos interligados que recebem sinais de entrada e, com base em sua dinâmica específica, produzem sinais de saída.

Dependendo de como essas variáveis mudam com o tempo, os sistemas podem ser classificados como:

- *Sistemas Contínuos*: Nesses sistemas, as variáveis (entrada, saída, estado) mudam de maneira contínua em relação ao tempo. Ou seja, elas podem assumir qualquer valor ao longo do tempo. Normalmente, tanto o tempo (t , geralmente um número real) quanto os sinais de entrada e saída são tratados como variáveis contínuas. É o que ocorre na maioria dos sistemas físicos, como circuitos elétricos, sistemas mecânicos e térmicos, entre outros. Por exemplo, imagine um termômetro de mercúrio. À medida que a temperatura ao redor muda, o nível de mercúrio no termômetro sobe ou desce de forma contínua. Não há “saltos” discretos no nível do mercúrio; ele se move suavemente em resposta às variações de temperatura.
- *Sistemas Discretos*: Em sistemas discretos, as variáveis (entrada, saída, estado) mudam em instantes

discretos de tempo. O tempo é representado como uma sequência discreta de valores (k , um número inteiro, geralmente) e os sinais de entrada e saída são discretos, definidos apenas nesses instantes discretos de tempo. Exemplos de sistemas discretos incluem sistemas digitais e sistemas que são analisados em instantes de tempo discretos (como no caso de amostragem de dados). Por exemplo, o preço de fechamento de uma ação da bolsa de valores ocorre em momentos discretos. Um relógio digital é um exemplo clássico. A cada minuto, a leitura do tempo muda, mas entre essas mudanças, o display permanece constante. Não há variação contínua no tempo como em um relógio analógico, onde o movimento do ponteiro dos segundos é contínuo.

- *Sistemas Digitais*: Subcategoria dos sistemas discretos, em que tanto o tempo quanto a amplitude das variáveis (entrada, saída, estado) são discretas. Isso implica que os sinais nestes sistemas não apenas mudam em momentos específicos, mas também estão limitados a um conjunto finito e pré-definido de valores. A quantização dessas amplitudes é frequentemente representada por números binários. Considere-se, por exemplo, um termômetro digital. Ele não apenas atualiza sua leitura em instantes discretos de tempo (como a cada segundo), mas também exibe as temperaturas quantizadas, como 20.5°C ou 21.0°C , sem representar os valores de forma contínua como observadas em termômetros de mercúrio analógicos. Um exemplo clássico adicional de sistema digital é o computador, no qual os dados são armazenados e processados na forma de bits (0s e 1s).

Os sinais de entrada e saída são elementos fundamentais que influenciam o comportamento de qualquer sistema. Os sinais de entrada atuam como estímulos que afetam e direcionam o funcionamento do sistema. Já os sinais de saída compõem a resposta ou reação resultante do sistema a um determinado sinal de entrada. Esses sinais de entrada e saída estão intrinsecamente ligados ao tipo do sistema em questão, desempenhando um papel crucial na forma como o sistema responde e interage com o seu ambiente:

- *Sinais de Entrada*: Influenciam o comportamento do sistema. Eles podem assumir várias formas, dependendo do contexto do sistema. Por exemplo, em um sistema de controle, os sinais de entrada podem ser comandos de controle, como direção e velocidade que um veículo autônomo deve seguir, ou perturbações, como mudanças imprevistas na estrada ou no clima que o veículo precisa considerar. Em um sistema de processamento de sinais, o sinal de entrada pode ser uma forma de onda de áudio ou um sinal de vídeo para ser processado.
- *Sinais de Saída*: Refletem a resposta do sistema ao comportamento ditado pelos sinais de entrada. No exemplo do veículo autônomo, os sinais de saída poderiam ser a velocidade real e o ângulo de direção ou curso que o veículo está tomando. Em um sistema de processamento de sinais, a saída poderia ser a forma de onda de áudio ou o sinal de vídeo processados.

Quanto à natureza, os sinais podem ser classificados em:

- *Sinais Contínuos*: São definidos para todos os valores de tempo contínuo. Se denotarmos o sinal contínuo por $x(t)$, a variável t pertencerá ao conjunto dos números reais. Por exemplo, podemos calcular o valor do sinal $x(t)$ em qualquer ponto no tempo, seja ele $t = 1.2$ ou $t = \pi$.
- *Sinais Discretos*: São definidos em instantes discretos de tempo. Se denotarmos o sinal discreto por $x(k)$, então a variável k pertencerá ao conjunto dos números inteiros. Os sinais discretos representam sequências de pontos como $\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots$.
- *Sinais Digitais*: Subtipo de sinais discretos em que, além do tempo, a amplitude é quantizada para um conjunto finito de possíveis valores. No caso discreto, o valor de $x(k)$ pode ser qualquer número real, como $\sqrt{2}$. No entanto, em um sinal digital, esse valor é quantizado, ou seja, arredondado ou ajustado para um dos valores possíveis dentro de um conjunto finito pré-determinado.

É oportuno reafirmar que a análise linear de sistemas lida com problemas centrais como modelagem dinâmica, análise de estabilidade, projeto de controladores, estimação de estados e parâmetros, otimização de desempenho e rejeição de distúrbios. O domínio dessas técnicas é crucial para caracterizar, controlar e aprimorar o comportamento de sistemas lineares em diversos campos da engenharia. A análise linear de sistemas é vital em áreas emergentes como robótica, veículos autônomos, redes elétricas inteligentes e manufatura avançada. Com

o avanço computacional e a crescente conectividade no século XXI, surgem aplicações inovadoras, como cidades digitais, geração distribuída de energia e realidade virtual. Além disso, a análise linear de sistemas fornece o alicerce para a integração de técnicas avançadas, como machine learning e big data, em tais contextos. Sua relevância só aumenta, em um mundo crescentemente interconectado.

O conteúdo desta apostila está organizado da seguinte forma: No Capítulo 2, aborda-se a modelagem de sistemas lineares, que consiste em representar entidades físicas por meio de relações matemáticas lineares. O Capítulo 3 apresenta a transformada de Laplace, ferramenta para resolver equações diferenciais lineares de maneira eficiente. Introduz também a função de transferência, conceito fundamental em análise de sistemas. O Capítulo 4 trata dos sistemas e sinais discretos, suas definições e propriedades. O Capítulo 5 aprofunda os sistemas discretos, introduzindo a transformada Z e suas aplicações. O Capítulo 6 abrange a análise de Fourier para sinais periódicos e não periódicos. O Capítulo 7 discute a análise no espaço de estado para sistemas lineares. Por fim, o Apêndice traz uma revisão de tópicos matemáticos relacionados.

Em suma, este material busca prover uma base sólida em análise linear de sistemas, destinando-se a estudantes e profissionais que buscam aprofundar-se na área. Ao final deste conteúdo, o leitor estará equipado com ferramentas e técnicas avançadas para modelar, analisar e resolver problemas complexos em engenharia e áreas relacionadas.

Capítulo 2

Conceitos de Modelagem de Sistemas e Equações Diferenciais

2.1 Modelagem de sistemas elétricos usando equações diferenciais

Esta seção descreve os passos para determinar o modelo matemático de alguns circuitos elétricos básicos, utilizando equações diferenciais ordinárias (EDOs). Uma abordagem mais completa pode ser encontrada nos livros citados nas referências bibliográficas.

Inicialmente, são apresentadas as leis das malhas e dos nós, comumente utilizadas para equacionar os sistemas. Em seguida, é introduzido o método das correntes de malha, também amplamente empregado para derivar a equação diferencial. O primeiro sistema a ser modelado é o circuito resistor-capacitor, que fornece uma equação diferencial de primeira ordem. Isso possibilita a definição e revisão de conceitos básicos sobre equações diferenciais ordinárias¹. Posteriormente, é realizada uma análise da resposta do sistema em termos de regime transiente e regime estacionário. Por fim, é derivado o modelo de segunda ordem do circuito resistor-indutor-capacitor.

2.1.1 Conceitos básicos

Os circuitos elétricos são formados por diversos componentes, que são geralmente classificados como ativos ou passivos. Os elementos ativos são aqueles que podem amplificar sinais ou fornecer energia ao circuito, tais como: diodos, transistores, circuitos integrados, dispositivos optoeletrônicos e fontes de corrente e de tensão. Por outro lado, os componentes passivos, interagem com essa energia de alguma maneira, dissipando-a em forma de calor, tais como os resistores, ou armazenando-a como os capacitores e indutores. A Figura 2.1 apresenta os símbolos usados para identificar os componentes passivos mais comuns: o resistor, o indutor e o capacitor.

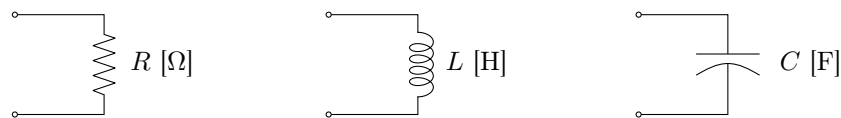


Figura 2.1: Componentes passivos: resistor (R), indutor (L) e capacitor (C).

A seguir, é apresentado um resumo das relações entre a tensão [V] e a corrente [A], para o resistor, o indutor e o capacitor, assumindo que esses componentes tenham um comportamento ideal.

1. **Resistor R :** A diferença de potencial, a tensão, v nos terminais do resistor R é proporcional à corrente i , ou seja

$$v = Ri$$

¹Alguns fundamentos básicos sobre equações diferenciais ordinárias estão apresentados no Apêndice A.2

2. **Indutor L :** A diferença de potencial v nos terminais do indutor L é proporcional à corrente i , ou seja

$$v = L \frac{di}{dt}$$

Integrando essa equação, obtém-se

$$i = \frac{1}{L} \int v \, dt$$

3. **Capacitor C :** A diferença de potencial v através do capacitor C depende da carga elétrica q acumulada nas placas do capacitor, ou seja

$$v = \frac{q}{C}$$

A corrente i que flui através do capacitor é igual à razão com que as cargas elétricas se movem, i.e. $i = dq/dt$. Dessa forma, a carga total acumulada nas placas do capacitor é dada por

$$q = \int i \, dt$$

Substituindo essa expressão para a carga q na equação da tensão v , tem-se

$$v = \frac{1}{C} \int i \, dt$$

Agora, derivando a expressão $v = q/C$ e notando que $dq/dt = i$, obtém-se

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{C} i$$

Portanto, a corrente pode ser determinada através da expressão

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

2.1.2 Leis das malhas e dos nós

De pose das relações acima, as equações que descrevem um circuito elétrico simples podem ser derivadas usando-se as leis de Kirchhoff, conhecidas como *lei dos nós* e *lei das malhas*:

Lei dos nós. A lei dos nós (ou lei das correntes) estabelece que a soma algébrica das correntes que entram num nó é nula, ou seja

$$\sum_n i_n = 0$$

Como regra geral, admite-se que a corrente, em qualquer porção do circuito, pode ser indicada a priori sem necessidade de saber se a corrente circula verdadeiramente no sentido indicado. Como convenção, uma corrente indicada como entrando num nó será positiva. No caso contrário, será negativa.

Lei das malhas. A lei das malhas (ou lei das tensões) estabelece que a soma algébrica das tensões ao longo de um circuito fechado, ou numa malha fechada, é nula, ou seja

$$\sum_n v_n = 0$$

Da mesma forma que a lei dos nós, deve-se começar por estabelecer a priori as tensões nos terminais de cada componente e o sentido do percurso do cálculo em cada malha. Por convenção, as tensões definidas de modo que o sentido do percurso entre pelo terminal positivo e saia pelo terminal negativo serão contadas positivamente. No caso contrário, serão contadas negativamente.

Para ilustrar esse método de análise, será utilizado o circuito apresentado na Figura 2.2 abaixo.

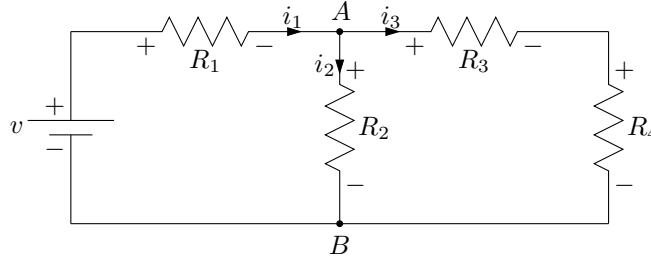


Figura 2.2: Circuito resistivo.

Para aplicar a lei dos nós, seleciona-se um nó, por exemplo, o ponto A , e denota-se por v_A a tensão desse nó com relação a um nó de referência. O nó de referência nesse caso é escolhido como sendo o terra, o ponto B . A corrente que entra no nó A tem sentido positivo e a que sai negativo. Assim, aplicando a lei dos nós no ponto A , obtém-se

$$(2.1) \quad i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad \implies \quad i_1 = i_2 + i_3$$

e aplicando a lei das malhas na primeira malha (a malha da esquerda), tem-se

$$(2.2) \quad -v + v_{R_1} + v_{R_2} = 0$$

em que v_{R_j} é a tensão através do resistor R_j . Como a corrente através do resistor R_1 é i_1 e a diferença de potencial através do resistor R_2 é v_A , tem-se de imediato que

$$v = i_1 R_1 + v_A \quad \implies \quad i_1 = \frac{v - v_A}{R_1}$$

Como a corrente que passa por R_2 é i_2 , tem-se

$$v_A = v_{R_2} = i_2 R_2 \quad \implies \quad i_2 = \frac{v_A}{R_2}$$

Aplicando agora a lei das malha na segunda malha (a malha da direita), que fornece

$$(2.3) \quad -v_{R_2} + v_{R_3} + v_{R_4} = 0$$

e notando que a corrente i_3 circula através de R_3 em série com R_4 , obtém-se

$$v_A = v_{R_3} + v_{R_4} = i_3 (R_3 + R_4) \quad \implies \quad i_3 = \frac{v_A}{R_3 + R_4}$$

Substituindo os valores de i_1 , i_2 e i_3 em (2.1), tem-se

$$\frac{v - v_A}{R_1} = \frac{v_A}{R_2} + \frac{v_A}{R_3 + R_4}$$

Nessa equação, é possível isolar a tensão v_A , fornecendo finalmente

$$v_A = v \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2(R_3 + R_4) + R_1(R_2 + R_3 + R_4)}$$

Observação 2.1.1 Observe que também é possível aplicar a lei das malhas na malha externa, fornecendo

$$-v + v_{R_1} + v_{R_3} + v_{R_4} = 0$$

Porém, essa equação nada acrescenta, já que nada mais é do que a combinação linear de (2.2) com (2.3).

2.1.3 Método das correntes de malha

Será considerado o mesmo circuito da Figura 2.2, usado anteriormente. Para aplicar esse método, considera-se que as correntes circulam nas malhas como descrito na Figura 2.3 abaixo.

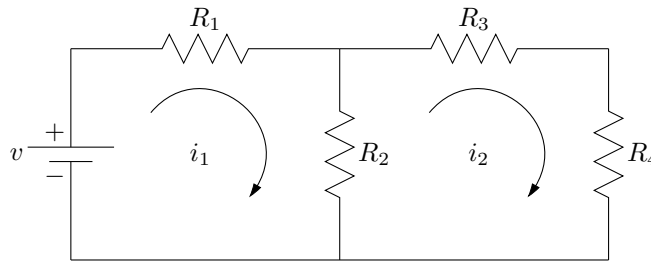


Figura 2.3: Ilustração do método das correntes de malha.

Assim, é necessário aplicar a lei das malhas para cada uma das malhas acima. Para a primeira malha com corrente i_1 , tem-se que a corrente fluindo através de R_1 é i_1 e a corrente através de R_2 é $i_1 - i_2$, portanto

$$v = i_1 R_1 + (i_1 - i_2) R_2$$

De forma similar, para a segunda malha, com corrente i_2 , tem-se

$$0 = i_2 R_3 + i_2 R_4 + (i_2 - i_1) R_2$$

Dessa forma, obtêm-se duas equações algébricas em i_1 e i_2 , que podem ser resolvidas simultaneamente. Uma vez obtidas as correntes, a tensão nos resistores é prontamente determinada.

2.1.4 Sistema de primeira ordem resistor-capacitor

Considere o circuito elétrico resistor-capacitor apresentado na Figura 2.4.

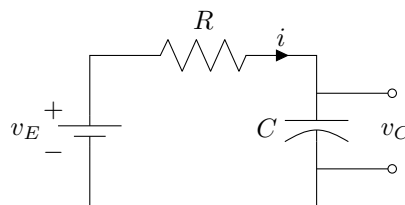


Figura 2.4: Circuito resistor-capacitor.

Aplicando a lei das malhas, obtém-se

$$v_E(t) = v_R(t) + v_C(t)$$

em que $v_R(t)$ é a diferença de potencial através do resistor R , dada por $v_R(t) = i(t)R$. Veja que a corrente $i(t)$ é a mesma através de todos os componentes do circuito. Usando a relação entre corrente e tensão num capacitor, dada por

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

tem-se que

$$RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = v_E(t)$$

que pode ser colocada na **forma padrão**, com o coeficiente da derivada de maior ordem sendo 1, ou seja:

$$(2.4) \quad \dot{y}(t) + a_1 y(t) = x(t)$$

com $y(t) = v_C(t)$, $\tau = RC$, $a_1 = 1/\tau$, $x(t) = v_E(t)/\tau$. Essa equação descreve a relação entre a tensão da fonte $v_E(t)$ e a tensão do capacitor $v_C(t)$. Trata-se de uma equação diferencial ordinária², que estabelece uma relação entre uma variável e suas derivadas. No contexto acima, essa equação ilustra como a tensão no capacitor varia com o tempo. Uma equação diferencial é chamada de “ordinária” quando envolve derivadas em relação a uma única variável independente, que, neste caso, é o tempo.

Na equação diferencial acima, a variável t é denominada de variável independente. Por outro lado, a variável y , que é a solução (incógnita) da equação diferencial, é a variável dependente. A ordem da equação diferencial é a ordem da mais alta derivada de y com relação a t . Nessa equação, o termo $x(t)$ é chamado de **termo forçante**, simbolizando a **entrada** ou **excitação** do sistema. Se $x(t) = 0$, tem-se uma **equação diferencial homogênea**, por outro lado, se $x(t) \neq 0$, tem-se uma **equação diferencial não homogênea**. Assim, (2.4) é uma equação diferencial não homogênea de primeira ordem. É oportuno ainda enfatizar que uma equação diferencial juntamente com as condições iniciais constitui um **problema de valor inicial**. Na equação diferencial (2.4), a condição inicial $v_C(0) = v_{C0}$ indica a carga do capacitor no instante de tempo $t = 0$.

Solução homogênea do sistema resistor-capacitor

A solução da equação (2.4) depende do termo forçante $x(t)$. Considerar-se-á inicialmente que a entrada $x(t)$ é nula, ou seja, que a equação diferencial é homogênea, dada por

$$(2.5) \quad \dot{y}(t) + a_1 y(t) = 0$$

com condições iniciais $y(0) = y_0$. Suponha que a solução tenha a forma

$$y(t) = e^{st}$$

com s uma constante a ser determinada. Derivando essa solução e substituindo-a na equação (2.4), obtém-se

$$se^{st} + a_1 e^{st} = 0 \quad \implies \quad (s + a_1)e^{st} = 0$$

Portanto

$$s + a_1 = 0$$

fornecendo $s = -a_1$. Assim, a **solução geral** da equação diferencial de primeira ordem homogênea (2.5) é dada por

$$(2.6) \quad y(t) = Ae^{-a_1 t}$$

em que A é uma constante arbitrária a ser determinada pela condição inicial. Note que a solução geral (2.6) parametriza o conjunto de todas as infinitas soluções de (2.5). Usando-se a condição inicial $y(0) = y_0$, tem-se

$$y_0 = Ae^0 = A$$

Assim, a solução da equação diferencial homogênea fica sendo

$$y(t) = y_0 e^{-a_1 t}$$

Essa **solução homogênea**, devido apenas às condições iniciais, é comumente chamada de **solução livre** ou ainda de **solução não forçada**.

É oportuno enfatizar que o parâmetro τ no sistema resistor-capacitor, dado por $\tau = RC$ [s], representa a constante de tempo do circuito em segundos. Claramente, esse parâmetro determina a velocidade de descarga do capacitor, já que $v_C(t) = v_{C0}e^{-t/\tau}$ com v_{C0} a diferença de potencial no capacitor no instante $t = 0$. Note que decorrido uma constante de tempo τ , o capacitor terá perdido aproximadamente 63.2% de sua carga.

²Alguns fundamentos básicos sobre equações diferenciais ordinárias estão apresentados no Apêndice A.2

Exemplo 2.1.1 Considere o circuito da Figura 2.4, em que o valor da resistência R é $2 \text{ [k}\Omega\text{]}$ e o valor do capacitor C é 0.1 [mF] . No instante $t = 0$, a diferença de potencial no capacitor é $v_{C0} = 0.6 \text{ [V]}$. Assim, para esses valores numéricos, $\tau = RC = 2 \times 10^3 \times 0.1 \times 10^{-3} = 0.2 \text{ [s]}$ e a tensão no capacitor é dada por

$$v_C(t) = 0.6e^{-t/\tau} = 0.6e^{-5t}$$

O gráfico da solução $v_C(t)$ está apresentado na Figura 2.5. Como esperado, transcorrido $t = \tau = 0.2 \text{ [s]}$, a tensão no capacitor será de apenas 36.8% do valor inicial v_{C0} .

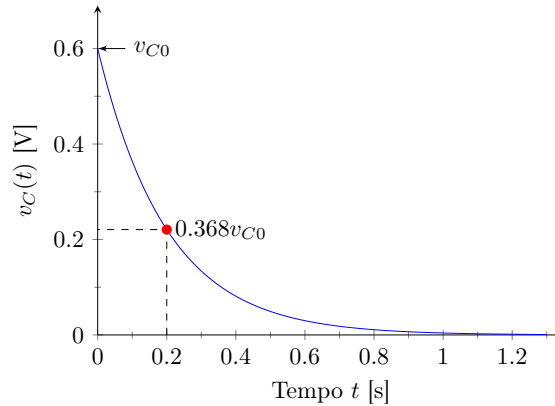


Figura 2.5: Tensão v_C no capacitor para $v_{C0} = 0.6 \text{ [V]}$.

Solução não homogênea

Na seção anterior, a solução da equação diferencial homogênea foi calculada considerando-se que o termo forçante era nulo. Esta seção determina a solução do **problema de valor inicial** dado pela equação diferencial não homogênea

$$(2.7) \quad \dot{y}(t) + a_1 y(t) = x(t)$$

juntamente com a condição inicial $y(0) = y_0$. É comum denominar a solução desse problema de valor inicial (que é única) de **solução completa** ou ainda de **solução total**. Por outro lado, uma **solução particular** ou um **integral particular** da equação diferencial não homogênea (2.7) é uma solução $y_p(t)$ qualquer que não envolva constantes arbitrárias, assim não necessariamente satisfará as condições iniciais.

A solução da equação não homogênea (2.7) pode ser obtida³ a partir de uma **solução particular** qualquer de (2.7) adicionando-se todas as possíveis soluções da equação homogênea associada (2.5). Portanto, a solução $y(t)$ da equação diferencial não homogênea (2.7) é dada por

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

em que $y_p(t)$ é uma solução particular qualquer de (2.7) e $y_h(t)$ é a **solução geral da equação homogênea associada** (2.5), contendo as constantes arbitrárias. Essa solução geral é frequentemente denominada de **função complementar** da equação diferencial não homogênea (2.7). Também designa-se por **solução geral da equação não homogênea**, a solução $y_h(t) + y_p(t)$ em que $y_h(t)$ é uma função complementar e $y_p(t)$ é um integral particular.

Como a solução geral da equação diferencial homogênea associada já foi determinada na seção anterior, tendo sido dada por (2.6), deve-se agora determinar uma solução particular para a entrada $x(t)$. Note, no entanto, que a solução particular não é única. Por exemplo, considerando-se que a entrada $v_E(t)$ é uma tensão constante de amplitude E , ou seja

$$x(t) = E/\tau = a_1 E$$

³Como demonstrado no Exercício 2.5.2, se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ forem duas soluções da equação diferencial não homogênea (2.7), então a diferença $y_1(t) - y_2(t)$ será uma solução da equação diferencial homogênea associada (2.5).

uma solução particular de (2.7) pode ser dada por

$$y_p(t) = E + Ce^{-a_1 t}$$

com $C \in \mathbb{R}$ uma constante qualquer. Assim, escolhendo-se a solução particular

$$y_p(t) = E$$

a solução geral da equação diferencial não homogênea (2.7) passa a ser

$$(2.8) \quad y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ae^{-a_1 t} + E$$

em que a constante arbitrária A é determinada usando-se a condição inicial. Considerando-se que a tensão $y(t)$ no instante $t = 0$ é $y(0) = y_0$ e substituindo essa condição inicial na equação (2.8), tem-se

$$y_0 = A + E \quad \implies \quad A = y_0 - E$$

Consequentemente, a solução completa da equação diferencial linear não de primeira ordem homogênea (2.7) para a entrada constante $x(t) = a_1 E$ fica sendo

$$(2.9) \quad y(t) = y_0 e^{-a_1 t} + E(1 - e^{-a_1 t})$$

Exemplo 2.1.2 Considere novamente o circuito da Figura 2.4, em que o valor da resistência R é 2 [kΩ] e o valor do capacitor C é 0.1 [mF]. Considere ainda que no instante $t = 0$ a diferença de potencial no capacitor é $v_{C0} = 0.6$ [V] e a tensão da fonte é $v_E(t) = 2$ [V]. Assim, notando que para $\tau = RC = 0.2$, $a_1 = 1/\tau = 5$ e a tensão no capacitor fica sendo

$$(2.10) \quad v_C(t) = 0.6e^{-5t} + 2(1 - e^{-5t})$$

A solução $v_C(t)$ está apresentada na Figura 2.6.

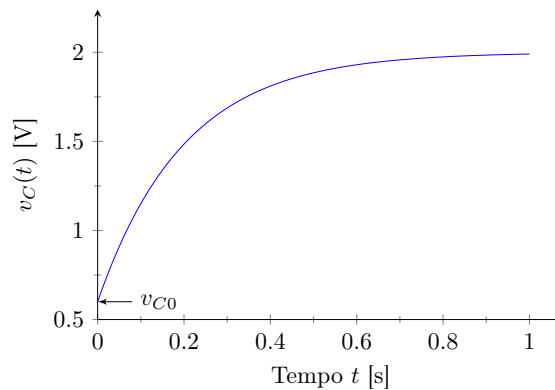


Figura 2.6: Tensão v_C no capacitor para $v_{C0} = 0.6$ [V] e $v_E(t) = 2$ [V].

Solução não homogênea usando o fator integrante

Agora, será apresentada uma segunda abordagem para se determinar a solução de uma equação diferencial de primeira ordem não homogênea, ou seja, em que o termo forçante $x(t)$ é diferente de zero. A equação a ser resolvida é a mesma equação (2.7), juntamente com sua condição inicial $y(0) = y_0$, ou seja

$$(2.11) \quad \dot{y}(t) + a_1 y(t) = x(t), \quad y(0) = y_0$$

Multiplicando ambos os lados dessa equação pelo fator integrante $e^{a_1 t}$, obtém-se

$$(2.12) \quad e^{a_1 t} \dot{y}(t) + e^{a_1 t} a_1 y(t) = e^{a_1 t} x(t)$$

Lembrando agora a regra da cadeia dada por

$$\frac{d}{dt} (e^{a_1 t} y(t)) = e^{a_1 t} \dot{y}(t) + e^{a_1 t} a_1 y(t)$$

tem-se diretamente que (2.12) pode ser reescrita como

$$(2.13) \quad \frac{d}{dt} (e^{a_1 t} y(t)) = e^{a_1 t} x(t)$$

Integrando ambos os lados dessa expressão, obtém-se

$$e^{a_1 t} y(t) \Big|_0^t = \int_0^t e^{a_1 \eta} x(\eta) d\eta$$

ou seja

$$e^{a_1 t} y(t) = y(0) + \int_0^t e^{a_1 \eta} x(\eta) d\eta$$

Portanto, a solução completa da equação diferencial de primeira ordem não homogênea (2.11) é dada por

$$(2.14) \quad y(t) = y_0 e^{-a_1 t} + \int_0^t e^{-a_1(t-\eta)} x(\eta) d\eta$$

Note que essa derivação é uma prova da existência e unicidade da solução da equação diferencial linear de primeira ordem não homogênea. Claramente, essa solução pode ser particionada como

$$y(t) = y_h(t) + y_f(t)$$

com o termo $y_h(t)$ sendo a **solução da homogênea** associada dada por

$$y_h(t) = y_0 e^{-a_1 t}$$

e o termo $y_f(t)$ sendo a **solução forçada** dada por

$$y_f(t) = \int_0^t e^{-a_1(t-\eta)} x(\eta) d\eta$$

Observação 2.1.2 A operação de integração que aparece na expressão da solução forçada acima tem a forma de uma **convolução**; uma operação matemática (com inúmeras aplicações práticas) que expressa a quantidade de sobreposição de uma função $g(t)$ à medida que ela se desloca sobre uma segunda função $f(t)$. A **convolução** entre as funções $f(t)$ e $g(t)$, denotada por $f(t) * g(t)$, é dada por

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\eta)g(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)g(t-\eta) d\eta = g(t) * f(t)$$

Exemplo 2.1.3 Sejam os sinais $f(t) = e^t \mu(t)$ e $g(t) = t\mu(t)$, em que $\mu(t)$ é a função Heaviside (o degrau unitário) definida como sendo $\mu(t) = 1$ para $t \geq 0$ e $\mu(t) = 0$ para $t < 0$. Assim, a convolução de $f(t)$ com $g(t)$ é dada por

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\eta)g(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t-\eta)} \mu(t-\eta) \eta \mu(\eta) d\eta = \int_0^t \eta e^{(t-\eta)} d\eta = e^t - t - 1$$

Do exposto na Observação 2.1.2 acima, percebe-se que a resposta forçada $y_f(t)$ nada mais é do que a convolução, no intervalo $[0, t]$, da entrada $x(t)$ com a função⁴ $h(t) = e^{-a_1 t}$, ou seja:

$$y_f(t) = \int_0^t h(t-\eta)x(\eta) d\eta = \int_0^t e^{-a_1(t-\eta)} x(\eta) d\eta$$

⁴Será visto no Exemplo 3.4.3 do Capítulo 3 que $h(t) = e^{-a_1 t}$ representa a resposta ao impulso do sistema.

É importante salientar ainda que, dependendo da função forçante $x(t)$, a integral de convolução pode ser de difícil resolução. Por outro lado, para o exemplo do circuito elétrico em que a entrada de tensão é constante, dada por $v_E(t) = E$, a solução completa (2.14) acima com $x(t) = E/\tau$ e $a_1 = 1/\tau$ fica sendo

$$y(t) = y_0 e^{-t/\tau} + \frac{E}{\tau} \int_0^t e^{-(t-\eta)/\tau} d\eta = y_0 e^{-t/\tau} + E(1 - e^{-t/\tau})$$

que é exatamente a solução obtida anteriormente em (2.9).

Exemplo 2.1.4 Considere o caso específico do Exemplo 2.1.2, em que $\tau = 1/5$, $v_E(t) = 2$ [V] e $v_{C0} = 0.6$ [V]. Nesse caso, a tensão $v_C(t)$ será dada por

$$\begin{aligned} v_C(t) &= 0.6e^{-t/\tau} + \frac{2}{\tau} e^{-t/\tau} \int_0^t e^{\eta/\tau} d\eta = 0.6e^{-t/\tau} + 2e^{-t/\tau} e^{\eta/\tau} \Big|_0^t \\ &= 0.6e^{-5t} + 2(1 - e^{-5t}) \end{aligned}$$

que é a solução dada em (2.10).

2.1.5 Regime transiente e regime estacionário

A solução da equação diferencial não homogênea (2.11), que é composta pela soma das soluções homogênea e forçada⁵, também pode ser particionada em um termo relacionado ao regime transiente e um termo relacionado ao regime estacionário (permanente).

Observe que para o problema de valor inicial, dado pela equação diferencial de primeira ordem não homogênea (2.11) e sua condição inicial

$$\dot{y}(t) + a_1 y(t) = x(t), \quad y(0) = y_0$$

a solução foi determinada como sendo

$$y(t) = \underbrace{y_0 e^{-a_1 t}}_{\text{homogênea}} + \underbrace{\int_0^t e^{-a_1(t-\eta)} x(\eta) d\eta}_{\text{forçada}}$$

Agora, considerando que o termo forçante seja $x(t) = a_1 E$, uma constante de amplitude $a_1 E$, tem-se

$$y(t) = \underbrace{y_0 e^{-a_1 t}}_{\text{homogênea}} + \underbrace{E(1 - e^{-a_1 t})}_{\text{forçada}}$$

que pode ainda ser decomposta como a soma dos regimes transiente e permanente, como segue

$$y(t) = \underbrace{(y_0 - E)e^{-a_1 t}}_{\text{transiente}} + \underbrace{E}_{\text{permanente}}$$

Assim, em regime permanente com $t \rightarrow \infty$, a resposta torna-se $y(t) = E$.

Observação 2.1.3 Note que para o exemplo do circuito resistor-capacitor, o regime permanente $v_C(t) = E$ implica que o capacitor estará plenamente carregado. Na prática, transcorrido $t = 3\tau$ [s], o termo transiente terá diminuído 95% e para $t = 5\tau$ [s], terá diminuído 99%.

Exemplo 2.1.5 A Figura 2.7 apresenta as respostas homogênea v_h , forçada v_f , transiente v_t , permanente v_p e completa, para o exemplo do circuito resistor-capacitor, em que $R = 2$ [kΩ], $C = 0.1$ [mF], $v_{C0} = 0.6$ [V] e $v_E(t) = 2$ [V].

⁵É importante enfatizar que os resultados obtidos nesta seção são válidos apenas para uma equação diferencial não homogênea tendo a forma (2.11), em que a entrada não contém termos derivativos. O caso mais geral é discutido no Exercício 2.5.3.

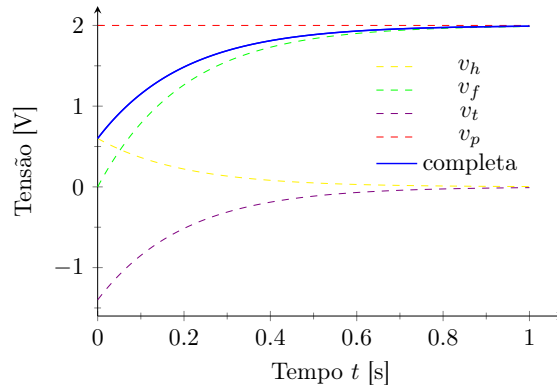


Figura 2.7: Respostas: v_h , v_f , v_t , v_p e completa, para o sistema resistor-capacitor.

2.1.6 Sistema de segunda ordem resistor-indutor-capacitor

Considere o sistema apresentado na Figura 2.8 abaixo, composto de um resistor, um indutor e um capacitor ligados em série.

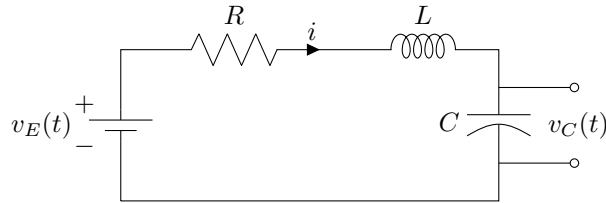


Figura 2.8: Circuito RLC em série.

Aplicando a lei das malhas nesse circuito, tem-se

$$v_E(t) = v_R + v_L + v_C$$

em que v_R , v_L e v_C são respectivamente as tensões no resistor R , no indutor L e no capacitor C . Para o resistor, a tensão é dada por $v_R = iR$. Para o indutor, sabe-se que $v_L = L(di/dt)$. Assim, a equação torna-se

$$v_E(t) = iR + L \frac{di}{dt} + v_C$$

Usando a relação entre a corrente e a tensão através do capacitor C , dada por

$$i = C \frac{dv_C}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt} = C \frac{d(dv_C/dt)}{dt} = C \frac{d^2 v_C}{dt^2}$$

obtem-se

$$v_E(t) = RC \frac{dv_C}{dt} + LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + v_C$$

Essa equação pode ser equivalentemente reescrita como

$$(2.15) \quad LC \ddot{v}_C + RC \dot{v}_C + v_C = v_E(t)$$

que é uma equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea⁶. A solução desse tipo de equação é apresentada na Seção 2.2.

⁶Alguns fundamentos básicos sobre equações diferenciais ordinárias estão apresentados no Apêndice A.2

2.2 Modelagem de sistemas mecânicos usando equações diferenciais

Esta seção descreve os passos para determinar o modelo matemático de alguns sistemas mecânicos básicos, utilizando equações diferenciais ordinárias (EDOs). O modelo matemático em forma de EDOs facilita a análise, as simulações computacionais e o projeto desses sistemas mecânicos. Serão tratados sistemas mecânicos translacionais e rotacionais, que podem ser descritos pelas três leis básicas da física Newtoniana, as leis de Newton. Uma abordagem mais completa pode ser encontrada nos livros citados nas referências bibliográficas.

Inicialmente, são estudados os sistemas mecânicos translacionais e suas respectivas representações matemáticas. Em seguida, é realizada a análise da deflexão estática de uma mola sob uma carga determinada. O primeiro exemplo de um sistema mecânico envolve uma massa acoplada a uma mola ideal, resultando na derivação de sua equação de movimento de segunda ordem. Logo após, incorpora-se o efeito do amortecimento viscoso ao sistema massa-mola. Posteriormente, a análise é estendida para abranger sistemas com múltiplos graus de liberdade. Finalmente, a representação matemática de sistemas mecânicos rotacionais é derivada.

2.2.1 Sistemas mecânicos translacionais

1. Mola de rigidez k . Pela lei de Hooke, tem-se que a força F exercida pela mola é proporcional ao deslocamento x com sentido oposto.

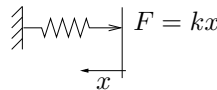


Figura 2.9: Mola ideal.

2. Amortecedor. Coeficiente de amortecimento c . Nesse caso, a força é proporcional à velocidade \dot{x} com sentido oposto.

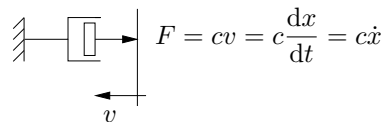


Figura 2.10: Amortecedor ideal.

3. Massa. Segunda lei de Newton.

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d(dx/dt)}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}$$



Figura 2.11: Princípio fundamental da dinâmica.

2.2.2 Deflexão estática da mola

Imagine uma mola no seu estado de equilíbrio natural. Ao se colocar uma massa m , a mola se deflete devido à ação da gravidade de um valor Δ , como apresentado na Figura 2.12.

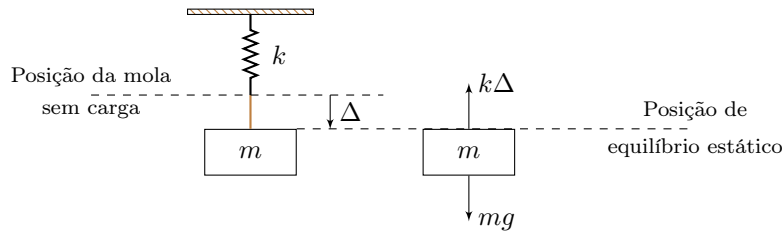


Figura 2.12: Deflexão estática da mola.

Para determinar a deflexão da mola, aplica-se o balanço de forças ao corpo na posição de equilíbrio estático. Pelo diagrama de corpo livre, verifica-se que as forças atuantes sobre a massa m são: a força peso mg e a reação da mola $k\Delta$. Portanto, o balanço de forças, levando em conta o sinal, fornece:

$$k\Delta = mg \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{mg}{k}$$

Observe que o valor positivo de Δ está de acordo com o fato da mola ter se alongado, como demonstra o sentido do vetor Δ na figura.

2.2.3 Sistema de segunda ordem massa-mola

Nesta seção, o modelo matemático de um sistema massa-mola de um grau de liberdade é derivado. Em seguida, o seu comportamento dinâmico é analisado. Apesar da simplicidade desse tipo de modelo, sua aplicação é inúmera. Por exemplo, o sistema de um grau de liberdade pode ser utilizado preliminarmente para a análise de uma suspensão veicular, como apresentado na Figura 2.13.

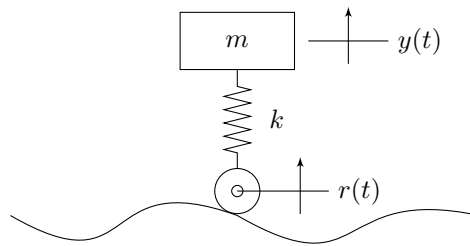


Figura 2.13: Modelo simplificado de uma suspensão veicular.

Para uma primeira modelagem, o perfil da rua será negligenciado, assim $r(t) = 0$, e o sistema passa a ter a configuração apresentada na Figura 2.14, em que m é a massa do corpo, k a rigidez elástica da mola, g a aceleração da gravidade e $y(t)$ o deslocamento da massa.

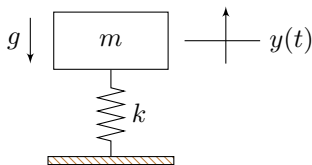


Figura 2.14: Sistema de um grau de liberdade.

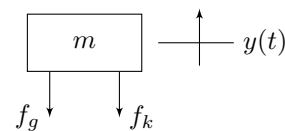


Figura 2.15: Diagrama de corpo livre (DCL).

A Figura 2.15 apresenta o diagrama de corpo livre (DCL), considerando que a posição $y = 0$ representa a posição de equilíbrio natural da mola, antes da deflexão devido à ação da gravidade. Nesse diagrama, f_k e f_g são, respectivamente, a força elástica de restituição da mola e a força gravitacional, dadas por:

$$f_k = ky \quad \text{e} \quad f_g = mg$$

Aplicando a segunda lei de Newton, a partir do DCL, obtém-se

$$+ \uparrow \sum \text{Forças} = -f_g - f_k = m\ddot{y}$$

Portanto, a equação de movimento é dada por

$$(2.16) \quad m\ddot{y}(t) + ky(t) = -mg$$

Observe que esta equação diferencial é não homogênea devido ao termo forçante resultante da ação da gravidade. Esse fato era esperado, já que o deslocamento $y(t)$ da massa representa a deflexão da mola a partir do seu estado de equilíbrio natural. No entanto, é possível reescrever a equação de movimento em torno da posição de equilíbrio estático da mola Δ , que é dada por

$$k\Delta = -mg \quad \implies \quad \Delta = -mg/k$$

Note que o sinal negativo está em consonância com o fato da mola sofrer uma contração devido ao efeito da gravidade. Finalmente, aplicando a mudança de variável

$$x(t) = y(t) - \Delta, \quad \dot{x}(t) = \dot{y}(t), \quad \ddot{x}(t) = \ddot{y}(t)$$

obtém-se a equação diferencial homogênea

$$(2.17) \quad m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$$

Essa equação pode ser reescrita na forma

$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0$$

em que $\omega_n = \sqrt{k/m}$ é a frequência natural do sistema. A frequência natural é um conceito fundamental na dinâmica de sistemas, indicando a frequência com a qual o sistema oscilaria na ausência de amortecimento e forças externas. Esta frequência é determinada pelas propriedades do sistema, como a rigidez k da mola e a massa m do objeto. Em sistemas mecânicos, como o massa-mola, a frequência natural desempenha um papel crucial na determinação do comportamento dinâmico, influenciando desde a resposta do sistema a estímulos externos até aspectos relacionados à ressonância e estabilidade.

A equação (2.17) é uma equação diferencial linear de segunda ordem homogênea, pois contém a derivada segunda do deslocamento x . Assim, são necessárias duas condições iniciais para que essa equação possa ser resolvida. Essas condições geralmente são dadas para o tempo inicial $t = 0$:

$$x(0) = x_0 \quad \text{e} \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

Solução homogênea do sistema massa-mola

Para resolver a equação diferencial (2.17), considera-se que a solução $x(t)$ possui a seguinte forma:

$$(2.18) \quad x(t) = Z \cos(\omega_n t + \phi)$$

com Z , ω_n e ϕ constantes a serem determinadas:

- Z : amplitude das oscilações;
- ω_n : frequência natural;
- ϕ : ângulo de fase.

O método consiste em diferenciar a solução (2.18) e substituir o resultado na equação diferencial (2.17). Aplicando a regra da cadeia, obtêm-se as derivadas primeira e segunda de $x(t)$ como segue:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -Z\omega_n \sin(\omega_n t + \phi) \\ \ddot{x}(t) &= -Z\omega_n^2 \cos(\omega_n t + \phi) \end{aligned}$$

Substituindo $x(t)$ e $\ddot{x}(t)$ na equação diferencial (2.17), obtém-se

$$\begin{aligned} -mZ\omega_n^2 \cos(\omega_n t + \phi) + kZ \cos(\omega_n t + \phi) &= 0 \\ (k - m\omega_n^2)Z \cos(\omega_n t + \phi) &= 0 \end{aligned}$$

Perceba que a equação

$$(k - m\omega_n^2)Z \cos(\omega_n t + \phi) = 0$$

implica que

$$(k - m\omega_n^2) = 0$$

já que a função $\cos(\omega_n t + \phi)$ não é identicamente nula. Consequentemente, tem-se

$$(2.19) \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

que representa a frequência natural ω_n do sistema. Agora, usando-se as condições iniciais:

$$x(0) = x_0 \quad \text{e} \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

tem-se que a solução proposta $x(t) = Z \cos(\omega_n t + \phi)$ satisfaz

$$x(0) = x_0 = Z \cos(\phi) \quad \implies \quad \cos(\phi) = \frac{x_0}{Z}$$

e a sua derivada $\dot{x}(t) = -Z\omega_n \sin(\omega_n t + \phi)$ satisfaz

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = -Z\omega_n \sin(\phi) \quad \implies \quad \sin(\phi) = \frac{-\dot{x}_0}{Z\omega_n}$$

Portanto, a solução final fica sendo

$$\begin{aligned} (2.20) \quad x(t) &= Z \cos(\omega_n t + \phi) \\ &= Z (\cos(\omega_n t) \cos(\phi) - \sin(\omega_n t) \sin(\phi)) \\ &= x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \end{aligned}$$

Observação 2.2.1 O ângulo de fase ϕ e a amplitude Z são facilmente determinados como segue. Lembrando que $\tan(\phi) = \sin(\phi)/\cos(\phi)$, tem-se

$$(2.21) \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{-\dot{x}_0}{x_0 \omega_n} \right)$$

Embora a amplitude Z possa ser retirada diretamente das expressões acima para o $\cos(\phi)$ e o $\sin(\phi)$, uma fórmula que não inclui relações trigonométricas pode ser obtida notando que $\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi) = 1$, ou seja,

$$(2.22) \quad \frac{x_0^2}{Z^2} + \frac{\dot{x}_0^2}{Z^2 \omega_n^2} \quad \implies \quad Z = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_n^2}}$$

Solução homogênea pela exponencial

No caso acima, foi considerado que a solução era do tipo

$$x(t) = Z \cos(\omega_n t + \phi)$$

No entanto, também pode-se considerar uma solução do tipo exponencial

$$x(t) = Ze^{\lambda t}$$

com λ e Z constantes a serem determinadas. Nessa derivação, tanto Z como λ podem ser números complexos⁷.

⁷Uma revisão sucinta de números complexos e funções de variáveis complexa encontra-se no Apêndice A.1.

As derivadas primeira e segunda de $x(t)$ são, respectivamente:

$$\dot{x}(t) = Z\lambda e^{\lambda t} \quad \text{e} \quad \ddot{x}(t) = Z\lambda^2 e^{\lambda t}$$

Substituindo-as na equação diferencial

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$$

obtém-se

$$\begin{aligned} mZ\lambda^2 e^{\lambda t} + kZe^{\lambda t} &= 0 \\ (m\lambda^2 + k)Ze^{\lambda t} &= 0 \\ m\lambda^2 + k &= 0 \end{aligned}$$

Definindo $\omega_n = \sqrt{k/m}$ e resolvendo a equação acima, obtém-se

$$\lambda = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm j\omega_n$$

Nesse caso, obtém-se duas soluções $\lambda_1 = +j\omega_n$ e $\lambda_2 = -j\omega_n$. Portanto a forma da solução $x(t)$ fica sendo

$$x(t) = Z_1 e^{j\omega_n t} + Z_2 e^{-j\omega_n t}$$

com números complexos Z_1 e Z_2 dados, respectivamente, por $Z_1 = A_1 + jB_1$ e $Z_2 = A_2 + jB_2$. Aplicando a fórmula de Euler para a exponencial dada por

$$e^{j\omega_n t} = \cos(\omega_n t) + j \sin(\omega_n t) \quad \text{e} \quad e^{-j\omega_n t} = \cos(\omega_n t) - j \sin(\omega_n t)$$

a solução $x(t)$ pode ser reescrita como

$$x(t) = (A_1 + jB_1)[\cos(\omega_n t) + j \sin(\omega_n t)] + (A_2 + jB_2)[\cos(\omega_n t) - j \sin(\omega_n t)]$$

ou de forma equivalente como

$$x(t) = (A_1 + A_2) \cos(\omega_n t) + (B_2 - B_1) \sin(\omega_n t) + j [(B_1 + B_2) \cos(\omega_n t) + (A_1 - A_2) \sin(\omega_n t)]$$

Sabendo-se que o deslocamento físico do sistema é real, não contendo parte imaginária, sua representação matemática $x(t)$ também deve ser. Portanto, deve-se anular a parte imaginária de $x(t)$, ou seja

$$j [(B_1 + B_2) \cos(\omega_n t) + (A_1 - A_2) \sin(\omega_n t)] = 0$$

implicando⁸ que $A_1 = A_2$ e $B_1 = -B_2$. Portanto, tem-se que

$$x(t) = 2A_2 \cos(\omega_n t) + 2B_2 \sin(\omega_n t)$$

Usando a seguinte relação trigonométrica

$$A \cos(\omega_n t + \phi) = A \cos(\phi) \cos(\omega_n t) - A \sin(\phi) \sin(\omega_n t)$$

a solução final $x(t)$ pode ser reescrita⁹ como

$$(2.23) \quad x(t) = Z \cos(\omega_n t + \phi)$$

com $Z = 2\sqrt{A_2^2 + B_2^2}$ e $\phi = \tan^{-1}(-B_2/A_2)$. Como era de se esperar, obtém-se a solução em termos da função cosseno, idêntica à equação (2.18).

⁸Essa conclusão poderia ter sido obtida simplesmente impondo que $Z_1 = Z_2^*$.

⁹Mostre que $2A_2 \cos(\omega_n t) + 2B_2 \sin(\omega_n t) = 2\sqrt{A_2^2 + B_2^2} \cos(\omega_n t + \phi)$, com $\tan(\phi) = -B_2/A_2$.

Exemplo 2.2.1 Desconsiderando a ação da gravidade no sistema massa-mola da Figura 2.16, determine sua frequência natural ω_n , a amplitude das oscilações e o deslocamento da massa devido às condições iniciais $x(0) = x_0 = 0.2$ [m] e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = -0.6$ [m/s]. Suponha que a massa seja dada por $m = 1$ [Kg] e a rigidez por $k = 9$ [N/m].

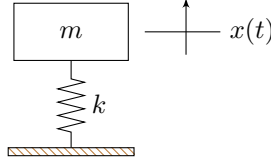


Figura 2.16: Sistema massa-mola.

A frequência natural é dada pela equação (2.19), ou seja, $\omega_n = \sqrt{9} = 3$ [rad/s]. O ângulo de fase é dado pela equação (2.21), i.e.,

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{-\dot{x}_0}{x_0 \omega_n} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{0.6}{0.2 \times 3} \right) = 0.7854 \text{ [rad]} = 45^\circ$$

A amplitude das oscilações pode ser obtida de (2.22) ou da equação $x_0 = Z \cos(\phi)$, fornecendo

$$Z = \frac{x_0}{\cos(\phi)} = \frac{0.2}{\cos(0.7854)} = 0.2828$$

Usando a equação (2.20), a solução final fica sendo

$$x(t) = Z \cos(\omega_n t + \phi) = 0.2828 \cos(3t + 0.7854)$$

que pode ainda ser reescrita como

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) = 0.2 \cos(3t) - 0.2 \sin(3t)$$

A resposta homogênea desse sistema às condições iniciais $x_0 = 0.2$ [m] e $\dot{x}_0 = -0.6$ [m/s] está apresentada na Figura 2.17.

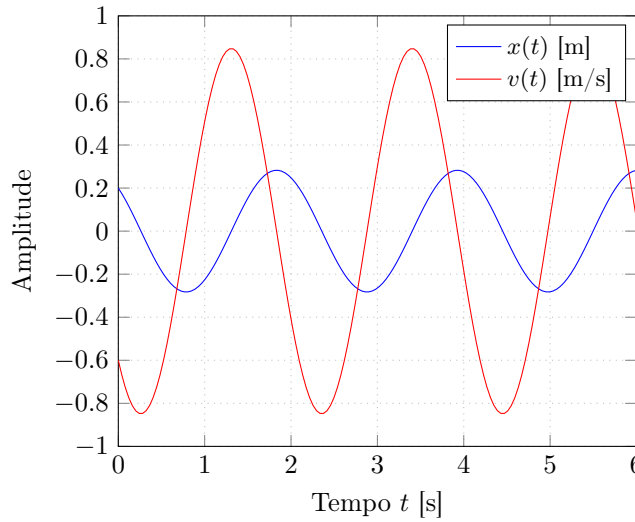


Figura 2.17: Resposta às condições iniciais $x_0 = 0.2$ [m] e $\dot{x}_0 = -0.6$ [m/s].

2.2.4 Sistema de segunda ordem massa-mola-amortecedor

Considere o sistema mecânico massa-mola-amortecedor da Figura 2.18, em que m [Kg] é a massa do carro, c [Ns/m] é o coeficiente de amortecimento viscoso, k [N/m] é a rigidez da mola e $p(t)$ [N] é uma força aplicada no sistema.

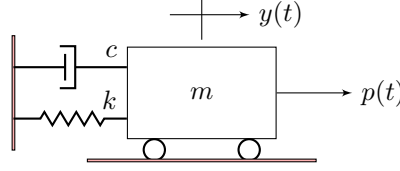


Figura 2.18: Sistema massa-mola-amortecedor.

A equação de movimento desse sistema é dada por

$$(2.24) \quad m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = p(t)$$

que é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem não homogênea, devido ao termo forçante $p(t)$. Essa equação diferencial descreve completamente o movimento do sistema massa-mola-amortecedor, relacionando aceleração, velocidade e posição com a força externa aplicada. No entanto, para análise e projeto de sistemas vibratórios, é conveniente reescrever de forma equivalente essa equação movimento na chamada forma padrão de segunda ordem:

$$(2.25) \quad \ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2y(t) = g(t)$$

em que $g(t) = p(t)/m$, $\omega_n = \sqrt{k/m}$, $\zeta = c/c_c$ e $c_c = 2\sqrt{km}$. Destacando, assim, a frequência natural ω_n do sistema e seu fator de amortecimento ζ , que é função do coeficiente de amortecimento c e do amortecimento crítico c_c . Observe que (2.24) possui três parâmetros, m , c e k . Por outro lado, (2.25) tem a vantagem de ser parametrizada por apenas dois parâmetros ω_n e ζ .

Solução homogênea do sistema massa-mola-amortecedor

Considerando que o termo forçante $p(t)$ é nulo, ou seja, $g(t) = 0$, a equação torna-se homogênea e sua solução deverá satisfazer as duas condições iniciais $y(0) = y_0$ e $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$, tendo em vista que o sistema tem ordem dois. Para determinar a solução geral da equação diferencial homogênea¹⁰, considera-se que ela tem a forma

$$y(t) = e^{\lambda t}$$

Substituindo $y(t)$ na equação diferencial (2.25), obtém-se

$$(\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2)e^{\lambda t} = 0$$

Como o termo $e^{\lambda t}$ nunca é nulo, chega-se a equação característica

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$$

cujas raízes são:

$$(2.26) \quad \lambda_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Dependendo do valor de ζ , obtêm-se três casos distintos:

1. Se $\zeta < 1$, as raízes são complexas conjugadas e o sistema é dito subamortecido.
2. Se $\zeta > 1$, as raízes são reais distintas e o sistema é dito superamortecido.
3. Se $\zeta = 1$, as raízes são reais repetidas e o sistema é denominado criticamente amortecido.

Para os casos $\zeta > 1$ e $\zeta < 1$, as raízes são distintas, e a solução geral da equação diferencial homogênea é dada por

$$y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

¹⁰Alguns fundamentos básicos sobre equações diferenciais ordinárias estão apresentados no Apêndice A.2

cuja derivada é

$$\dot{y}(t) = A\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

Usando as condições iniciais, tem-se

$$\begin{aligned} y(0) = y_0 &= A + B \\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0 &= A\lambda_1 + B\lambda_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

Portanto

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{bmatrix}$$

que resulta em

$$(2.27) \quad A = \frac{\dot{y}_0 - \lambda_2 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \text{e} \quad B = \frac{-\dot{y}_0 + \lambda_1 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Para o caso $\zeta < 1$, as raízes (2.26) são complexas conjugadas e assim podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\zeta\omega_n + j\omega_d \\ \lambda_2 &= -\zeta\omega_n - j\omega_d \end{aligned}$$

com $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$. Essas raízes fornecem as constantes (2.27) dadas por

$$\begin{aligned} A &= \frac{\dot{y}_0 + (\zeta\omega_n + j\omega_d)y_0}{2j\omega_d} \\ B &= \frac{-\dot{y}_0 + (j\omega_d - \zeta\omega_n)y_0}{2j\omega_d} \end{aligned}$$

Assim, a solução fica sendo

$$\begin{aligned} y(t) &= Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = Ae^{(-\zeta\omega_n + j\omega_d)t} + Be^{(-\zeta\omega_n - j\omega_d)t} \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} [Ae^{j\omega_d t} + Be^{-j\omega_d t}] \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} \left[\frac{\dot{y}_0 + (\zeta\omega_n + j\omega_d)y_0}{2j\omega_d} e^{j\omega_d t} + \frac{-\dot{y}_0 + (-\zeta\omega_n + j\omega_d)y_0}{2j\omega_d} e^{-j\omega_d t} \right] \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} \left[\frac{\dot{y}_0}{2j\omega_d} (e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}) + \frac{y_0\zeta\omega_n}{2j\omega_d} (e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}) + \frac{j\omega_d y_0}{2j\omega_d} (e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t}) \right] \end{aligned}$$

Usando a identidade de Euler

$$\sin \theta t = \frac{e^{j\theta t} - e^{-j\theta t}}{2j} \quad \text{e} \quad \cos \theta t = \frac{e^{j\theta t} + e^{-j\theta t}}{2}$$

a solução $y(t)$ pode finalmente ser reescrita como

$$\begin{aligned} (2.28) \quad y(t) &= e^{-\zeta\omega_n t} \left[\frac{\dot{y}_0}{\omega_d} \sin \omega_d t + \frac{y_0\zeta\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t + y_0 \cos \omega_d t \right] \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} \left[\frac{\dot{y}_0 + \zeta\omega_n y_0}{\omega_d} \sin \omega_d t + y_0 \cos \omega_d t \right] \end{aligned}$$

com $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$.

Para o caso $\zeta > 1$, as raízes (2.26) são reais distintas e fornecem as constantes (2.27) dadas por

$$\begin{aligned} A &= \frac{\dot{y}_0 + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n y_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \\ B &= \frac{-\dot{y}_0 + (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n y_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \end{aligned}$$

Portanto, a solução fica sendo

$$\begin{aligned}
 y(t) &= Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \\
 &= Ae^{(-\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t} + Be^{(-\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1})t} \\
 &= e^{-\zeta\omega_n t} \left[Ae^{\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t} + Be^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t} \right] \\
 &= e^{-\zeta\omega_n t} \left[\frac{\dot{y}_0 + (\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})\omega_n y_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} e^{\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t} + \frac{-\dot{y}_0 + (-\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})\omega_n y_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} e^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t} \right] \\
 &= e^{-\zeta\omega_n t} \left[\frac{\dot{y}_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} \left(e^{\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t} - e^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t} \right) + \frac{\zeta\omega_n y_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} \left(e^{\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t} + e^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\omega_n y_0\sqrt{\zeta^2-1}}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} \left(e^{\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t} + e^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Usando a identidade

$$\sinh \theta t = \frac{e^{\theta t} - e^{-\theta t}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh \theta t = \frac{e^{\theta t} + e^{-\theta t}}{2}$$

a solução final $y(t)$ pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 (2.29) \quad y(t) &= e^{-\zeta\omega_n t} \left[\frac{\dot{y}_0}{\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} \sinh \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t + \frac{\zeta\omega_n y_0}{\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} \sinh \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t + y_0 \cosh \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t \right] \\
 &= e^{-\zeta\omega_n t} \left[\frac{\dot{y}_0 + \zeta y_0 \omega_n}{\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} \sinh \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t + y_0 \cosh \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t \right]
 \end{aligned}$$

Para o caso $\zeta = 1$, as raízes (2.26), que agora são reais e repetidas, se reduzem a

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\zeta\omega_n = -\omega_n$$

Nesse caso, a solução geral da homogênea tem a forma

$$\begin{aligned}
 y(t) &= Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t} = Ae^{-\omega_n t} + Bte^{-\omega_n t} \\
 \dot{y}(t) &= -A\omega_n e^{-\omega_n t} + Be^{-\omega_n t} - Bt\omega_n e^{-\omega_n t}
 \end{aligned}$$

Substituindo as condições iniciais, obtêm-se

$$\begin{aligned}
 y(0) &= y_0 = A \\
 \dot{y}(0) &= \dot{y}_0 = -A\omega_n + B \quad \implies \quad B = \dot{y}_0 + \omega_n y_0
 \end{aligned}$$

Portanto, a solução fica sendo

$$\begin{aligned}
 (2.30) \quad y(t) &= Ae^{-\omega_n t} + Bte^{-\omega_n t} \\
 &= e^{-\omega_n t} (A + Bt) \\
 &= e^{-\omega_n t} [y_0 + (\dot{y}_0 + \omega_n y_0)t]
 \end{aligned}$$

Observação 2.2.2 Note que a solução para o caso $\zeta = 1$, dada por (2.30), pode ser obtida de (2.28) fazendo-se o limite quando $\zeta \rightarrow 1$. Para ver esse fato, reescreva $y(t)$, dada por (2.28), como segue:

$$y(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[(\dot{y}_0 + \zeta\omega_n y_0) t \frac{\sin \omega_d t}{\omega_d t} + y_0 \cos \omega_d t \right]$$

Em seguida, aplique o limite com $\zeta \rightarrow 1$, notando que $\omega_d \rightarrow 0$ e $\lim_{z \rightarrow 0} (\sin z)/z = 1$, para fornecer:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} e^{-\zeta\omega_n t} \left[(\dot{y}_0 + \zeta\omega_n y_0) t \frac{\sin \omega_d t}{\omega_d t} + y_0 \cos \omega_d t \right] = e^{-\omega_n t} [(\dot{y}_0 + \omega_n y_0) t + y_0]$$

Solução não homogênea

Considere a equação diferencial não homogênea (2.25), em que a entrada agora é uma força constante $p(t) = k$ [N], ou seja, a equação diferencial de segunda ordem fica sendo

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2y(t) = \omega_n^2$$

em que $a_1 = 2\zeta\omega_n$ e $a_2 = \omega_n^2$. Claramente, uma solução particular dessa equação é dada por

$$y_p(t) = 1$$

Como discutido na Seção 2.2.4, a forma da solução geral da homogênea associada depende do valor do coeficiente ζ . Se $\zeta = 1$, as duas raízes do polinômio característico são idênticas¹¹, dadas por $\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$, e assim a solução geral da homogênea associada tem a forma

$$y_h(t) = Ae^{-\omega_n t} + Bte^{-\omega_n t}$$

Consequentemente, a solução geral da equação diferencial não homogênea é dada por

$$y(t) = 1 + Ae^{-\omega_n t} + Bte^{-\omega_n t}$$

Considerando as condições iniciais $y(0) = y_0$ e $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$, a solução completa fica sendo

$$y(t) = 1 + e^{-\omega_n t} ((1 + \omega_n t)(y_0 - 1) + t\dot{y}_0)$$

Por outro lado, se $\zeta \neq 1$, as raízes λ_1 e λ_2 são distintas e a solução geral da homogênea associada tem a forma

$$y_h(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, \quad \text{com} \quad \lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Assumindo o caso particular¹² em que $\zeta = 0$, as raízes passam a ser $\lambda_{1,2} = \pm j\omega_n$ e, assim, a solução geral da equação diferencial não homogênea tem a forma

$$y(t) = 1 + Ae^{-j\omega_n t} + Be^{j\omega_n t}$$

e a solução completa fica sendo

$$y(t) = 1 + (y_0 - 1)\cos(\omega_n t) + \frac{\dot{y}_0 \sin(\omega_n t)}{\omega_n}$$

Para o sistema mecânico massa-mola-amortecedor (2.25), sob ação de uma força constante $p(t) = k$ [N] e condições iniciais nulas, a Figura 2.19 apresenta a resposta para diferentes valores de ξ com $\omega_n = 7$ rad/s e a Figura 2.20 apresenta a resposta do sistema para diferentes valores de ω_n com $\xi = 0.3$.

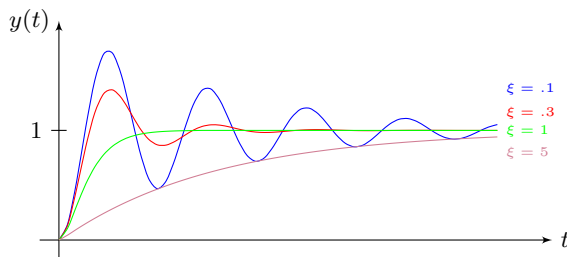


Figura 2.19: Diferentes valores de ξ com $\omega_n = 7$.

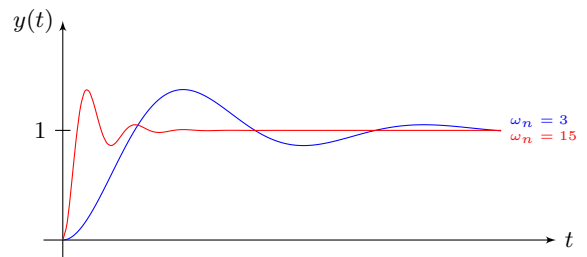


Figura 2.20: Diferentes valores de ω_n com $\xi = .3$.

¹¹O Exemplo A.3 demonstra como tratar o caso em que o polinômio característico apresenta raízes repetidas.

¹²O Exercício 2.5.12 apresenta a solução para o caso geral em que $\zeta \geq 0$.

2.2.5 Sistemas com múltiplos graus de liberdade

Esta seção descreve os passos para se obter o modelo matemático de sistemas com mais de um grau de liberdade, como, por exemplo, o sistema apresentado na Figura 2.21.

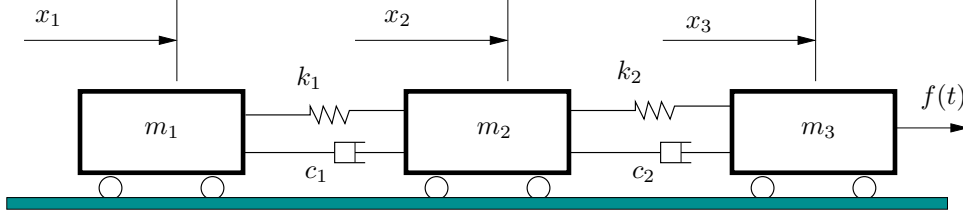


Figura 2.21: Sistema com 3 graus de liberdade.

Os procedimentos para obter a equação diferencial que governa esse sistema são idênticos aos executados anteriormente, usando-se a segunda lei de Newton. O diagrama de corpo livre para esse sistema está apresentado na Figura 2.22.

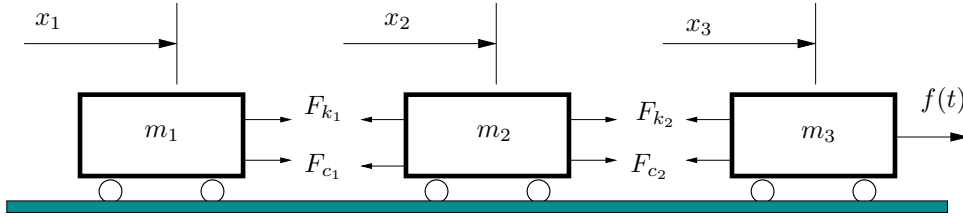


Figura 2.22: Diagrama de corpo livre.

Considerando o sinal das forças representado nesse diagrama de corpo livre, tem-se

$$\begin{aligned} F_{k_1} &= k_1(x_2 - x_1), & F_{k_2} &= k_2(x_3 - x_2) \\ F_{c_1} &= c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), & F_{c_2} &= c_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \end{aligned}$$

Aplicando o balanço das forças para cada uma das massas m_i , $i = 1, 2, 3$, dado por

$$\sum_j F_{k_j} + F_{c_j} = m_i \ddot{x}_i$$

em que F_{k_j} e F_{c_j} são as forças atuantes no corpo i , tem-se que

$$\begin{aligned} F_{k_1} + F_{c_1} &= m_1 \ddot{x}_1 \\ -F_{k_1} + F_{k_2} - F_{c_1} + F_{c_2} &= m_2 \ddot{x}_2 \\ f(t) - F_{k_2} - F_{c_2} &= m_3 \ddot{x}_3 \end{aligned}$$

Equivalentemente, tem-se

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 - k_1(x_2 - x_1) - c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_1(x_2 - x_1) - k_2(x_3 - x_2) + c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) &= 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 + k_2(x_3 - x_2) + c_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) &= f(t) \end{aligned}$$

Essa equação diferencial pode ser reescrita na forma matricial, como segue

$$(2.31) \quad \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t)$$

ou seja

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = Ff(t)$$

em que M é a matriz de massa, C a matriz de amortecimento, K a matriz de rigidez e F a matrix que posiciona a entrada $f(t)$, obtidas diretamente da forma matricial (2.31) acima. Note que essas matrizes são simétricas. O vetor x nesse caso representa os deslocamentos $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$. Se a matriz de massa M for inversível, a equação de movimento tem a forma

$$\ddot{x} + M^{-1}C\dot{x} + M^{-1}Kx = M^{-1}Ff(t)$$

2.2.6 Sistemas mecânicos rotacionais

No caso de sistemas rotacionais, o deslocamento passa a ser um deslocamento angular, geralmente representado por θ . A velocidade é denotada por ω . A relação entre o deslocamento angular e a velocidade é $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. Portanto, a aceleração angular é dada por

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d(d\theta/dt)}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$

O torque T aplicado ao sistema possui as seguintes relações:

1. Mola torcional de rigidez k :

$$T = k\theta$$

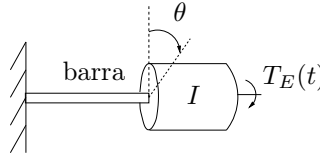
2. Coeficiente de amortecimento c :

$$T = c\omega = c\frac{d\theta}{dt} = c\dot{\theta}$$

3. Momento de inércia I :

$$T = I\ddot{\theta}$$

A figura abaixo apresenta um sistema mecânico torcional consistindo de uma massa, com momento de inércia I , acoplada à extremidade de uma barra de torção de rigidez k e coeficiente de amortecimento c , sob ação de um torque $T_E(t)$.



O diagrama de corpo livre¹³ para esse sistema está apresentado na Figura 2.23.

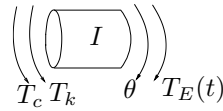


Figura 2.23: Diagrama de corpo livre.

Nesse diagrama, a massa com momento de inércia I sofre uma rotação θ sob ação de um torque externo $T_E(t)$ e dos torques de reação $T_k = k\theta$ e $T_c = c\dot{\theta}$ provenientes da rigidez k e do amortecimento c . O balanço de torques, usando a segunda lei de Newton

$$\oplus \sum T = T_E - T_c - T_k = I\ddot{\theta}$$

fornece

$$I\ddot{\theta}(t) + c\dot{\theta}(t) + k\theta(t) = T_E(t)$$

que pode ainda ser reescrita na forma padrão de segunda ordem

$$\ddot{\theta}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{\theta}(t) + \omega_n^2\theta(t) = g(t)$$

em que $\zeta = c/(2\sqrt{kI})$, $\omega_n = \sqrt{k/I}$ e $g(t) = T_E(t)/I$.

¹³Note-se que as forças e os torques estão representados nos diagramas de corpo livre com seus sentidos corretos, portanto devem ter magnitudes positivas.

2.3 Analogia entre sistemas mecânicos e elétricos

A compreensão da analogia entre sistemas mecânicos e elétricos é crucial na engenharia, pois oferece perspectivas valiosas para uma abordagem interdisciplinar na resolução de problemas complexos. Esse entendimento não apenas facilita uma melhor intuição sobre os sistemas elétricos para aqueles com um forte entendimento de mecânica, mas também permite a aplicação de técnicas e métodos de análise de um campo ao outro. Essa analogia permite que se transite entre conceitos mecânicos e elétricos com maior facilidade e compreensão.

Para explicitar a analogia que existe entre os modelos dos sistemas mecânicos e elétricos, reescreve-se a equação (2.15) em termos da carga elétrica $q(t)$, que está relacionada com tensão $v_C(t)$ pela fórmula

$$q(t) = C v_C(t)$$

Em termos da carga $q(t)$, o modelo passa a ser

$$(2.32) \quad L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \hat{C}q(t) = v_E(t), \quad \hat{C} = \frac{1}{C}$$

cuja analogia com o modelo (2.24), dado por

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t),$$

agora é óbvia. Além disso, a equação do sistema elétrico (2.32) pode ser reescrita na forma padrão de segunda ordem

$$\ddot{q}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{q}(t) + \omega_n^2 q(t) = g(t)$$

com $\omega_n = \sqrt{\hat{C}/L}$, $\zeta = R/c_c$, $c_c = 2\sqrt{\hat{C}L}$ e $g(t) = v_E(t)/L$. Essa equação é idêntica à equação do sistema mecânico de segunda ordem na forma padrão, dada por (2.25). Claramente, ambas equações possuem a mesma solução em termos de ζ e ω_n .

2.4 Propriedades de sistemas dinâmicos

Esta seção explora as propriedades fundamentais dos sistemas dinâmicos, que são cruciais para entender e manipular uma ampla gama de sistemas na engenharia. As propriedades que serão apresentadas — linearidade, causalidade e invariância no tempo — não são apenas conceitos teóricos, mas também ferramentas práticas que permitem aos engenheiros analisar e projetar sistemas de forma eficaz. Compreender estas propriedades é essencial para prever o comportamento dos sistemas em resposta a diferentes entradas e condições operacionais.

A linearidade, por exemplo, oferece um caminho para simplificar análises complexas, enquanto a causalidade está intrinsecamente relacionada à previsibilidade. A invariância no tempo, por sua vez, permite que análises e projetos sejam generalizados, independentemente do momento de observação ou operação. Juntos, esses conceitos formam a espinha dorsal da modelagem e análise de sistemas em diversas aplicações de engenharia, desde circuitos elétricos até mecânica estrutural. A seguir, cada uma dessas propriedades é definida, ilustrando como elas são aplicadas na análise de um sistema que relaciona um sinal de entrada $x(t)$ com o sinal de saída $y(t)$, através de um processo qualquer, como representado na Figura 2.24.

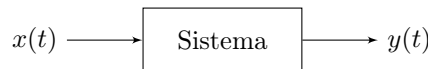


Figura 2.24: Sistema a tempo contínuo.

Para o sistema ilustrado na Figura 2.24, as seguintes propriedades são definidas:

1. **Linearidade:** sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ as saídas para as entradas $x_1(t)$ e $x_2(t)$, respectivamente. Então, o sistema será linear se a saída para a entrada

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \quad \text{for} \quad y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

com α e β constantes quaisquer.

Exemplo 2.4.1 O sistema descrito pela equação diferencial

$$\dot{y}(t) = x(t), \quad y(0) = 0$$

é linear, já que

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau = \int_0^t \alpha x_1(\tau) d\tau + \beta x_2(\tau) d\tau = \alpha \int_0^t x_1(\tau) d\tau + \beta \int_0^t x_2(\tau) d\tau = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

Exemplo 2.4.2 O sistema descrito pela equação diferencial

$$\dot{y}(t) + y^2(t) = x(t), \quad y(0) = 0$$

não é linear. Note que para uma entrada constante qualquer $x(t) = c$, a saída é dada por

$$y(t) = \sqrt{c} \tanh(\sqrt{c}t)$$

que claramente é uma relação não linear, já que para $x(t) = c_1 + c_2$, tem-se

$$y(t) = \sqrt{c_1 + c_2} \tanh(\sqrt{c_1 + c_2}t) \neq y_1(t) + y_2(t) = \sqrt{c_1} \tanh(\sqrt{c_1}t) + \sqrt{c_2} \tanh(\sqrt{c_2}t)$$

Observação 2.4.1 A linearidade também é conhecida como **princípio da superposição**, que pode ser definido pelas seguintes duas propriedades:

$$\begin{array}{ll} F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2) & \text{Aditividade} \\ F(\alpha x) = \alpha F(x) & \text{Homogeneidade} \end{array}$$

com α uma constante qualquer.

2. **Causalidade:** um sistema é dito causal (não antecipativo), se a saída num instante de tempo τ depender apenas de valores da entrada em $t \leq \tau$.

Exemplo 2.4.3 O sistema dado pela relação

$$y(t) = \cos(t+1)x(t)x(t-3)$$

é causal, já que a saída no instante $t = \tau$ depende da entrada no instante τ e no instante passado $\tau - 3$.

Exemplo 2.4.4 O sistema dado por

$$y(t) = \cos(t)x(t+1)$$

não é causal, já que a saída no instante $t = \tau$ depende da entrada no instante futuro $\tau + 1$.

3. **Invariância no tempo:** se $y(t)$ for a saída de um sistema invariante no tempo quando $x(t)$ for a entrada, então $y(t - \tau)$ será a saída quando $x(t - \tau)$ for a entrada.

Exemplo 2.4.5 Considere o sistema dado pela seguinte relação

$$y(t) = \sin(x(t))$$

Seja $y_1(t)$ a saída para a entrada $x_1(t)$, ou seja,

$$y_1(t) = \sin(x_1(t))$$

Seja $x_2(t) = x_1(t - \tau)$, então

$$y_2(t) = \sin(x_2(t)) = \sin(x_1(t - \tau)) = y_1(t - \tau)$$

Portanto, o sistema é invariante no tempo.

Exemplo 2.4.6 Considere o sistema dado por

$$y(t) = tx(t)$$

Seja $y_1(t)$ a saída para a entrada $x_1(t)$, ou seja,

$$y_1(t) = tx_1(t)$$

Seja $x_2(t) = x_1(t - \tau)$, então

$$y_2(t) = tx_2(t) = tx_1(t - \tau)$$

No entanto,

$$y_1(t - \tau) = (t - \tau)x_1(t - \tau) \neq y_2(t)$$

Portanto, esse sistema não é invariante no tempo (é um sistema variante no tempo).

2.5 Exercícios

Considerações iniciais: é vedado o uso da Transformada de Laplace para todos os exercícios desta seção.

Exercício 2.5.1 Mostre que a solução homogênea para a equação diferencial de primeira ordem

$$\dot{y}(t) + a_1 y(t) = 0$$

com condições iniciais $y(t_0) = y_0$, que ocorre num instante de tempo t_0 não necessariamente nulo, é

$$y(t) = y_0 e^{-a_1(t-t_0)}$$

Exercício 2.5.2 Mostre que se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ forem duas soluções da equação diferencial não homogênea

$$\dot{y}(t) + a_1 y(t) = x(t)$$

Então a diferença $y_1(t) - y_2(t)$ será uma solução da equação diferencial homogênea associada

$$\dot{y}(t) + a_1 y(t) = 0$$

Exercício 2.5.3 Considere a seguinte equação diferencial não homogênea com um termo derivativo na entrada:

$$\dot{y}(t) + a_1 y(t) = b_0 \dot{x}(t) + b_1 x(t), \quad y(0) = y_0, \quad x(0) = x_0$$

Mostre que a mudança de variável

$$z(t) = y(t) - b_0 x(t)$$

coloca o sistema na forma (2.11), ou seja, na forma

$$\dot{z}(t) + a_1 z(t) = \bar{x}(t)$$

em que $\bar{x}(t) = (b_1 - a_1 b_0)x(t)$ e a condição inicial é dada por $z(0) = y(0) - b_0 x(0)$. Assim, mostre que:

1. A solução completa $y(t)$ é dada por

$$y(t) = b_0 x(t) + (y_0 - b_0 x_0) e^{-a_1 t} + (b_1 - a_1 b_0) \int_0^t e^{-a_1(t-\eta)} x(\eta) d\eta$$

2. A solução forçada para a entrada $x(t) = \gamma e^{-\beta t}$ fica sendo

$$y_f(t) = b_0 \gamma (e^{-\beta t} - e^{-a_1 t}) + \gamma (b_1 - a_1 b_0) \frac{e^{-\beta t} - e^{-a_1 t}}{a_1 - \beta}$$

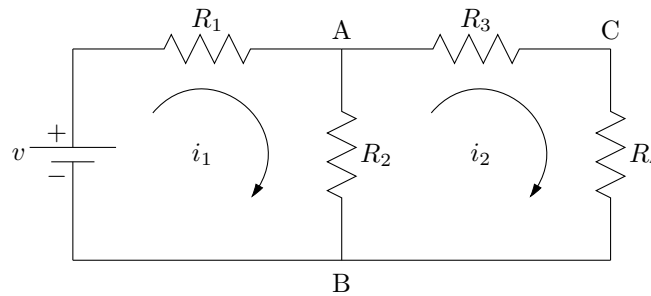
3. A solução forçada para uma entrada constante de amplitude γ passa a ser

$$y_f(t) = b_0\gamma(1 - e^{-a_1t}) + \gamma(b_1 - a_1b_0)\frac{1 - e^{-a_1t}}{a_1}$$

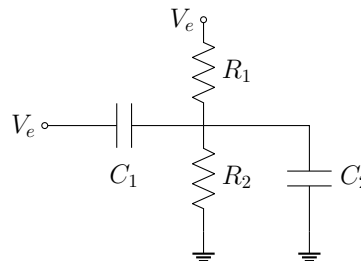
4. A resposta completa para uma entrada constante de amplitude γ é dada por

$$y(t) = b_0\gamma + (y_0 - b_0\gamma)e^{-a_1t} + \gamma(b_1 - a_1b_0)\frac{1 - e^{-a_1t}}{a_1}$$

Exercício 2.5.4 Considere o circuito abaixo, composto por resistências R_1 , R_2 , R_3 e R_4 e pela fonte de tensão v . Usando o método das correntes de malha, determine a tensão nos pontos A e C. No mais, determine as correntes de malha i_1 e i_2 .



Exercício 2.5.5 Considere o circuito da figura abaixo, em que C_1 e C_2 são capacitores, R_1 e R_2 são resistores e V_e é uma fonte de tensão. A tensão $v_c(t)$ de interesse é a tensão no capacitor C_2 .



1. Determine a equação diferencial em termos de $v_c(t)$.
2. Usando os valores numéricos $C_1 = C_2 = 1$ [μF], $R_1 = 2R_2 = 1000$ [$\text{k}\Omega$], determine:
 - (a) A solução homogênea para a condição inicial $v_c(0) = 5$ [V];
 - (b) A solução forçada para uma tensão de entrada constante $v_e = 220$ [V];
 - (c) A solução para a condição inicial $v_c(0) = 5$ [V] e tensão de entrada $v_e(t) = 220$ [V];
 - (d) Decomponha a solução em termos do regime transiente e do estacionário (permanente).

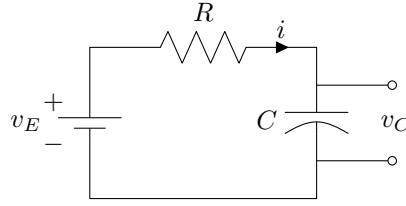
Exercício 2.5.6 Repita a questão anterior 2.5.5, considerando agora que $v_e(t) = 12e^{-2t}$ [V].

Exercício 2.5.7 Para o circuito da questão 2.5.5, determine a resposta forçada para uma tensão de entrada alternada $v_e(t)$ dada por:

1. $v_e(t) = 3\sin(5t)$;
2. $v_e(t) = 2\sin(3t + \pi/2)$.

Use os valores numéricos fornecidos na questão 2.5.5.

Exercício 2.5.8 Considere o circuito RC da figura abaixo



em que a tensão de entrada $v_E(t)$ é dada por uma rampa de amplitude unitária e duração T segundos, descrita pela função contínua por partes

$$v_E(t) = \begin{cases} t/T & , \text{ se } 0 \leq t \leq T \\ 0 & , \text{ se } t > T \end{cases}$$

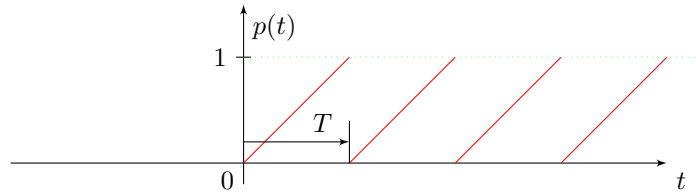
Para esse circuito, mostre que a tensão no capacitor é $v_C(t) = v_f(t) + v_{ic}(t)$ com

$$v_f(t) = \frac{1}{T}(t + \tau(e^{-t/\tau} - 1)), \quad 0 \leq t \leq T$$

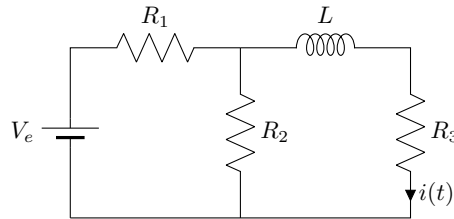
$$v_{ic}(t) = \frac{1}{T}(e^{-t/\tau}(\tau + e^{T/\tau}(T - \tau))), \quad t > T$$

em que o termo $v_f(t)$ corresponde à solução forçada no intervalo de tempo $t \in [0, T]$ e o termo $v_{ic}(t)$ corresponde à solução para o intervalo de tempo $t > T$, dada pela condição inicial $v_0 = v_f(T)$, que inicia-se no instante de tempo $t_0 = T$.

Exercício 2.5.9 Sabendo que o circuito RC é um sistema linear invariante no tempo, use o resultado do Exercício 2.5.8 para esboçar o gráfico da tensão no capacitor para a entrada de tensão dada pela função periódica dente de serra da figura abaixo. Use os seguintes valores numéricos: $\tau = 0.2$ e $T = 1$.



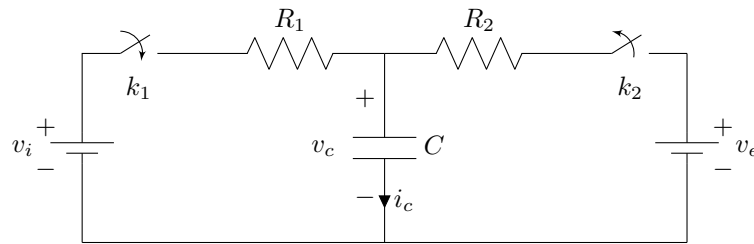
Exercício 2.5.10 Considere o circuito RL abaixo, composto por resistores R_1 , R_2 e R_3 , um indutor L e uma fonte de tensão V_e .



1. Para esse circuito, determine a equação diferencial em termos da corrente $i(t)$ que flui através do indutor.
2. Usando os valores numéricos $R_1 = 3 \text{ } [\Omega]$, $R_2 = 6 \text{ } [\Omega]$, $R_3 = 12 \text{ } [\Omega]$ e $L = 2 \text{ } [\text{H}]$, determine:

- (a) A resposta homogênea para a condição inicial $i(0) = 1 \text{ } [\text{A}]$.
- (b) A resposta forçada para uma tensão de entrada $v_e(t) = 42 \cos(t) \text{ } [\text{V}]$.
- (c) A solução para a condição inicial $i(0) = 1$ e tensão de entrada $v_e(t) = 42 \cos(t) \text{ } [\text{V}]$.
- (d) Decomponha a solução em termos do regime transiente e do estacionário (permanente).

Exercício 2.5.11 Seja o circuito abaixo, composto por dois resistores R_1 e R_2 , por um capacitor C , duas fontes de tensão v_i e v_e , e duas chaves k_1 e k_2 .



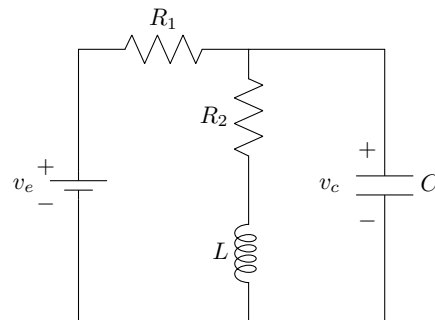
1. Suponha que o circuito encontra-se em regime permanente, com a chave k_1 aberta e a k_2 fechada. Determine a tensão em que o capacitor está submetido. Chame essa tensão inicial de $v_c(0) = v_{c0}$.
2. Suponha agora que o circuito, que encontrava-se em regime permanente, é chaveado (num instante de tempo qualquer que podemos denominar de $t = 0$), fazendo com que a chave k_1 feche e a k_2 abra. Assim:
 - (a) Determine a equação diferencial do circuito em termos da tensão $v_c(t)$ do capacitor.
 - (b) Determine a tensão $v_c(t)$ para $R_1 = 4 \text{ [k}\Omega\text{]}$, $R_2 = 2 \text{ [k}\Omega\text{]}$, $C = 5 \text{ [}\mu\text{F}\text{]}$, $v_i = 10 \text{ [V]}$ e $v_e = 4 \text{ [V]}$.
 - (c) Decomponha a resposta $v_c(t)$ em termos do regime transiente e do permanente.
 - (d) Calcule a corrente $i_c(t)$ através do capacitor e calcule $\lim_{t \rightarrow \infty} i_c(t)$.

Exercício 2.5.12 Determine a solução da equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = \omega_n^2$$

com $\zeta \geq 0$ e condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

Exercício 2.5.13 Considere o circuito abaixo, composto de dois resistores R_1 e R_2 , um indutor L , um capacitor C e a fonte de tensão V_e .



1. Para esse sistema, determine a equação diferencial em termos da tensão $v_c(t)$ do capacitor.
2. Coloque a equação na forma padrão

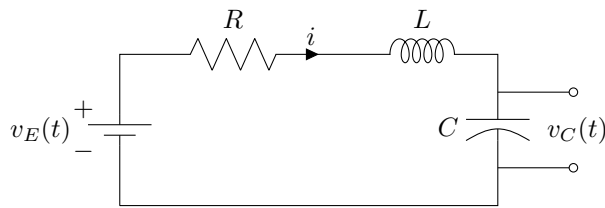
$$\ddot{v}_c(t) + 2\zeta\omega_n\dot{v}_c(t) + \omega_n^2v_c(t) = f(t)$$

determinando assim o fator de amortecimento ζ , a frequência natural ω_n e a excitação $f(t)$.

3. Para os valores $R_1 = 4 \text{ [}\Omega\text{]}$, $C = 0.25 \text{ [F]}$ e $L = 1 \text{ [H]}$, determine o intervalo de valores para $R_2 > 0$ de forma que o sistema seja: a) subamortecido; b) criticamente amortecido; c) superamortecido.
4. Determine 03 equações diferenciais; uma em termos da diferença de potencial (a tensão) entre os terminais de R_1 ; outra em termos da tensão entre os terminais de R_2 e a terceira em termos da tensão entre os terminais de L .

5. Determine 02 equações diferenciais; uma em termos da corrente que flui através do indutor e a outra em termos da corrente que flui através do capacitor.
6. Considerando os dados numéricos usados em (3) para o caso criticamente amortecido, calcule a tensão $v_c(t)$ no capacitor assumindo que a tensão inicial do capacitor seja $1V$, a corrente inicial no indutor seja $2A$ e a tensão da bateria seja $5V$.
7. Decomponha a resposta anterior (6) em termos de resposta homogênea, resposta forçada, regime transiente e permanente.

Exercício 2.5.14 Considere o circuito RLC abaixo, composto de um resistor R , um indutor L , um capacitor C e uma fonte de tensão $v_E(t)$.

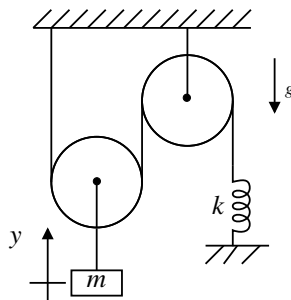


1. Para esse sistema, determine a equação diferencial em termos da tensão no resistor e em termos da tensão no indutor.
2. Escreva a equação diferencial em termos da corrente i que flui no circuito, colocando-a na forma padrão de segunda ordem

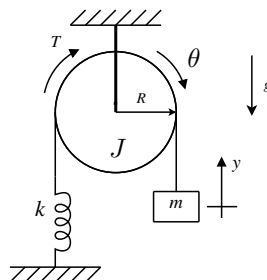
$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{di(t)}{dt} + \omega_n^2 i(t) = f(t)$$

determinando assim o fator de amortecimento ζ , a frequência natural ω_n e a excitação $f(t)$.

Exercício 2.5.15 Considere o sistema de polias apresentado na figura abaixo, em que a mola possui uma rigidez elástica k [N/m]. Assuma que a gravidade é dada por $g = 9,81$ [m/s²] e que uma deflexão positiva represente um alongamento da mola e uma deflexão negativa uma compressão da mola. Determine a deflexão estática da mola quando a polia estiver sujeita a uma carga de massa m [kg].



Exercício 2.5.16 Considere o sistema da figura abaixo, constituído de uma polia de momento polar de inércia J e raio R , uma mola de rigidez elástica k e uma massa m . A polia está sujeita a um torque externo T .



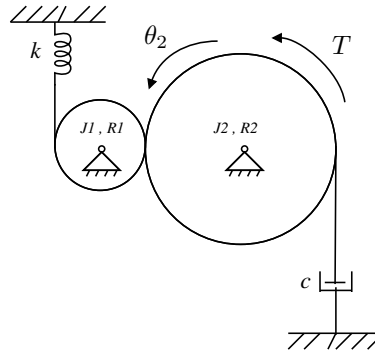
1. Derive a expressão para a deflexão estática da mola devido ao efeito da gravidade.
2. Considerando que $y(t)$ representa o deslocamento referente ao equilíbrio estático, determine a equação diferencial de movimento em termos do deslocamento $y(t)$.
3. Reescreva essa equação diferencial de movimento em termos do ângulo $\theta(t)$, na forma padrão

$$\ddot{\theta}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{\theta}(t) + \omega_n^2\theta(t) = f(t)$$

determinando ζ , ω_n e $f(t)$.

4. Determine a solução homogênea para as seguintes condições iniciais $y(0) = -1$ e $\dot{y}(0) = 1$. Considere os seguintes valores numéricos $k = 10$, $J = 2$, $R = 3$ e $m = 1$.
5. Determine uma solução particular $\theta_p(t)$ para uma entrada de torque constante $T = 3$.
6. Determine a solução para a entrada $T = 3$ e condições iniciais $y(0) = -1$ e $\dot{y}(0) = 1$.

Exercício 2.5.17 Considere o sistema da figura abaixo, em que o momento polar de inércia das engrenagens 1 e 2 são respectivamente J_1 [m⁴] e J_2 [m⁴], o raio das engrenagens 1 e 2 são respectivamente R_1 [m] e R_2 [m], os deslocamentos angulares das engrenagens 1 e 2 são respectivamente θ_1 [rad] e θ_2 [rad]. A engrenagem 2 está sujeita a um torque externo T [N.m]. A mola possui rigidez k [N/m] e o amortecedor coeficiente de amortecimento c [N.s/m]. Nesse sistema, o torque T é aplicado na coroa (a maior engrenagem) que aciona o pinhão (a menor engrenagem). No ponto de contato, ambas engrenagem possuem a mesma velocidade tangencial.



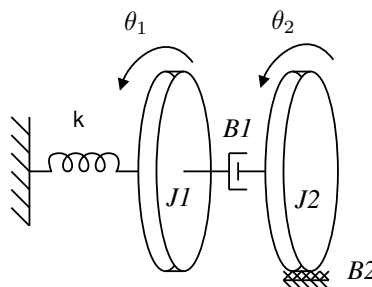
1. Derive a equação diferencial de movimento em termos do ângulo θ_1 na forma padrão

$$\ddot{\theta}_1(t) + 2\zeta\omega_n\dot{\theta}_1(t) + \omega_n^2\theta_1(t) = f(t)$$

determinando ζ , ω_n e $f(t)$.

2. Reescreva essa equação em termos de $\theta_2(t)$, determinando os novos valores de ζ , ω_n e $f(t)$.

Exercício 2.5.18 Seja o sistema mecânico da figura abaixo, constituído por dois volantes de momento polar de inércia J_1 e J_2 [m⁴], ligados através de um amortecedor torcional B_1 [N.s.m]. O volante J_1 é conectado à parede por uma mola k [N.m] e sua rotação angular é $\theta_1(t)$. O volante J_2 está ligado a um amortecedor B_2 [N.s.m] e sua rotação angular é $\theta_2(t)$. O volante J_1 está sujeito a um torque externo T [N.m] no sentido horário.

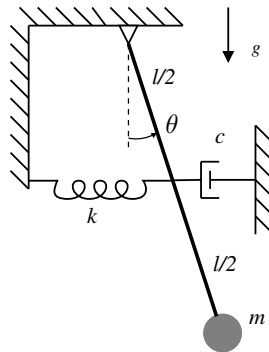


Para esse sistema mecânico, derive a equação diferencial de movimento em termos de $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$. Coloque-a na forma matricial

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t), \quad x = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

determinando as matrizes de massa M , amortecimento C , rigidez K e o vetor de excitação $F(t)$.

Exercício 2.5.19 Considere o sistema pêndulo-mola-amortecedor apresentado na figura abaixo, em que uma massa pontual m está conectada na extremidade de uma haste de comprimento l . Considere ainda que tanto a mola, de rigidez elástica k [N/m], como o amortecedor, com coeficiente de amortecimento c [N.s/m], estão conectados no meio da haste em $l/2$. O deslocamento angular do pêndulo no sentido anti-horário é denotado por θ [rad].



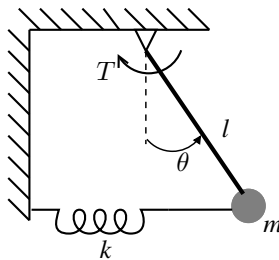
1. Determine a equação de movimento não linear do sistema em termos de θ .
2. Linearize em torno da origem a equação obtida no item acima, considerando pequenas oscilações, ou seja, assumindo que $\sin(\theta) \approx \theta$ e $\cos(\theta) \approx 1$.
3. Coloque a equação de movimento linearizada na forma padrão de segunda ordem

$$\ddot{\theta}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{\theta}(t) + \omega_n^2\theta(t) = f(t)$$

determinando ζ , ω_n e o termo forçante $f(t)$.

4. Calcule $\theta(t)$ para as condições iniciais $\theta_0 = 1$ e $\dot{\theta}_0 = -1$ e valores numéricos $g = 10$, $m = 1$, $l = 10$, $c = 40$, $k = 96$.

Exercício 2.5.20 Considere o pêndulo apresentado na figura abaixo, constituído de uma massa m [kg], uma mola de rigidez elástica k [N/m] e uma haste de comprimento l [m]. O deslocamento angular do pêndulo no sentido anti-horário é θ [rad]. O pêndulo está sujeito a um torque externo T , no sentido horário. Considere o efeito da gravidade.



1. Determine a equação de movimento não linear em termos do ângulo $\theta(t)$.
2. Linearize em torno da origem a equação obtida no item anterior, considerando pequenas oscilações, ou seja, assumido que $\sin(\theta) \approx \theta$ e $\cos(\theta) \approx 1$.

3. Coloque a equação de movimento linearizada na forma padrão de segunda ordem

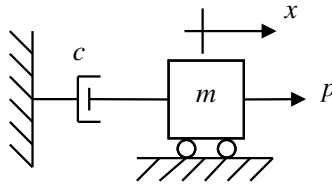
$$\ddot{\theta}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{\theta}(t) + \omega_n^2\theta(t) = f(t)$$

determinando ζ , ω_n e o termo forçante $f(t)$.

4. Considerando $f(t) = A\cos\omega t$, mostre que a expressão abaixo é uma solução particular:

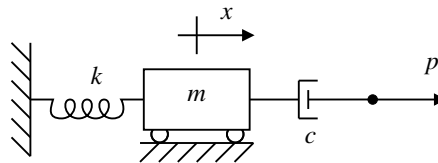
$$\theta_p(t) = A\cos(\omega t)/(\omega_n^2 - \omega^2)$$

Exercício 2.5.21 A figura abaixo apresenta um sistema mecânico constituído de uma massa m [kg] conectada a uma parede através de um amortecedor c [N.s/m]. O deslocamento da massa é denotado por $x(t)$ [m]. O sistema está sujeito a uma força externa $p(t)$ [N].



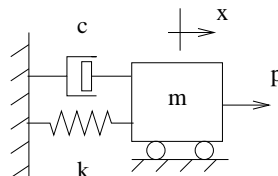
1. Determine a equação diferencial de movimento em termos do deslocamento $x(t)$.
2. Mostre que essa equação pode ser rescrita como uma equação de primeira ordem em termos da velocidade $v(t) = \dot{x}(t)$.
3. Assumindo as condições iniciais $x(0) = -1$ e $\dot{x}(0) = 3$, determine a velocidade da massa no tempo $t = 1$ segundos, quando uma força constante de amplitude 5 [N] é aplicada no sistema. Assuma os seguintes valores numéricos: $m = 2$ e $c = 1$.
4. Assumindo os mesmos dados do item anterior, determine o deslocamento da massa no tempo $t = 1$ segundos.

Exercício 2.5.22 Considere o sistema mecânico da figura abaixo, constituído de uma massa m [kg] conectada a uma parede por meio de uma mola de rigidez elástica k [N/m]. A outra extremidade da massa está conectada a um amortecedor c [N.s/m]. Devido a uma excitação externa $p(t)$, a massa sofre um deslocamento $x(t)$ [m].



1. Assumindo que $p(t)$ tem unidade de velocidade, derive a equação diferencial de movimento.
2. Assumindo que $p(t)$ tem unidade de deslocamento, derive a equação de movimento.

Exercício 2.5.23 Considere o sistema massa-mola-amortecedor da figura abaixo, com os seguintes valores numéricos: $m = 1$, $k = 100$ e $c = 10$.



1. Determine o deslocamento $x(t)$ da massa para uma entrada constante $p(t) = 5$ e condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = -1$.
2. Decomponha a resposta $x(t)$ em termos de solução homogênea e solução forçada.
3. Decomponha a resposta $x(t)$ em termos do regime transiente e do permanente.

Exercício 2.5.24 Considere a equação diferencial de segunda ordem não homogênea dada por

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = f(t), \quad 0 \leq \zeta < 1$$

1. Determine uma solução particular $x_p(t)$ para a entrada constante $f(t) = A$.
2. Assim, mostre que a solução completa para a entrada constante $f(t) = A$ é dada por

$$x(t) = \frac{A}{\omega_n^2} + e^{-\zeta\omega_n t} \left(c_1 e^{-\omega_n t \sqrt{\zeta^2 - 1}} + c_2 e^{\omega_n t \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right)$$

com c_1 e c_2 constantes a serem determinadas pelas condições iniciais.

3. Assumindo $\omega_n = 1$ e $\zeta = 1/2$, mostre que a solução completa para a entrada constante $f(t) = 3$ e condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 1$ é dada por

$$x(t) = 3 - 2e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$$

4. Mostre que uma solução particular para a entrada $f(t) = \sin(\omega t)$ é dada por

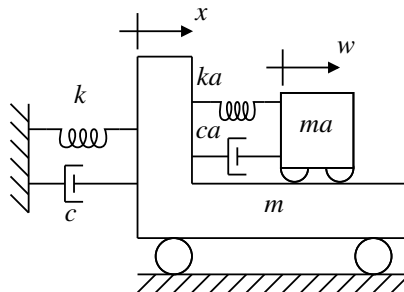
$$x_p(t) = \frac{(\omega_n^2 - \omega^2) \sin(\omega t) - 2\zeta\omega_n\omega \cos(\omega t)}{\omega^4 + 2\omega^2(2\zeta^2 - 1)\omega_n^2 + \omega_n^4}$$

5. Assumindo $\omega_n = 1$ e $\zeta = 1/2$, mostre que a solução completa para a entrada harmônica $f(t) = \sin(t)$ e condições iniciais $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = -1$ é dada por

$$x(t) = 2e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \cos(t)$$

6. Decomponha a solução completa, obtida no item anterior 5, nas seguintes parcelas: solução homogênea, solução forçada, regime transiente e regime permanente.

Exercício 2.5.25 Considere o sistema da figura abaixo, constituído de uma massa principal m [kg], um amortecedor c [N.s/m], uma mola de rigidez elástica k [N/m]. Em cima da massa principal, corre uma massa m_a [kg], ligada à massa m por meio de um amortecedor c_a [N.s/m] e de uma mola k_a [N/m]. O deslocamento da massa m é denotado por $x(t)$ e o da massa m_a por $w(t)$. Uma força externa $p(t)$, com sentido positivo na direção x , é aplicada no carro de massa m .

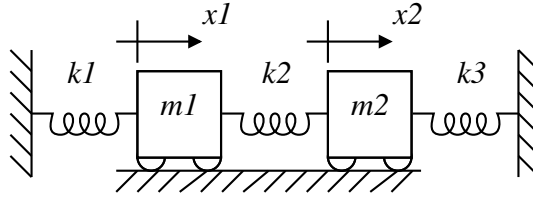


Derive a equação de movimento em termos dos deslocamentos $x(t)$ e $w(t)$ na forma matricial

$$M\ddot{z}(t) + C\dot{z}(t) + Kz(t) = F(t), \quad z = \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$$

determinando as matrizes de massa M , amortecimento C , rigidez K e o vetor de excitação $F(t)$.

Exercício 2.5.26 Considere o sistema mecânico com dois graus de liberdade ilustrado na figura abaixo, composto de duas massas m_1 [kg] e m_2 [kg] e três molas k_1 , k_2 e k_3 [N/m]. Os deslocamentos das massas m_1 e m_2 são respectivamente $x_1(t)$ [m] e $x_2(t)$ [m]. A massa m_2 está sujeita a uma excitação externa $p(t)$.



1. Derive a equação de movimento desse sistema em termos de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ na forma matricial

$$M\ddot{x}(t) + Kx(t) = Hp(t), \quad x(0) = x_0, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

determinando as matrizes M e K , e o vetor H .

2. Considere que $m_1 = m_2 = 1$ e $k_3 = k_1$. Mostre que a matriz K pode ser decomposta como

$$K = U\Lambda U^T, \quad U^T U = I, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_1 + 2k_2 \end{bmatrix}$$

3. Usando a mudança de variável $q = U^T x$, mostre que a equação de movimento pode ser reescrita na forma (diagonal) desacoplada

$$\ddot{q}(t) + \Lambda q(t) = Bp(t), \quad q(0) = q_0, \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. Considere que a entrada seja uma constante de amplitude $p(t) = 2(k_1^2 + 2k_2k_1)$ e que as condições iniciais sejam $x_1(0) = -1$, $\dot{x}_1(0) = \sqrt{k_1}$, $x_2(0) = 1$ e $\dot{x}_2(0) = \sqrt{k_1}$. Determine primeiro a resposta na coordenada $q(t)$ e em seguida na coordenada $x(t)$.

5. Determine a resposta $q(t)$ para a entrada $p(t) = \sin \omega t$ e condições iniciais nulas.

Exercício 2.5.27 Considere um sistema S cuja a saída $y(t)$ e a entrada $x(t)$ estão relacionados por

1. $y(t) = tx(t)$
2. $y(t) = x^2(t+1)$
3. $y(t) = x(t) \sin(t+1)$
4. $y(t) = x(\sin(t))$

Determine se o sistema S é ou não é: (i) linear; (ii) invariante no tempo; (iii) causal.

Capítulo 3

Transformada de Laplace

A transformada unilateral de Laplace¹ é uma poderosa ferramenta capaz de converter equações diferenciais no domínio do tempo em equações algébricas de uma variável complexa s ². Assim, operações de diferenciação e integração são transformadas em operações algébricas, facilitando a resolução das equações diferenciais. É importante salientar que a transformada de Laplace também permite analisar o comportamento dinâmico de um sistema linear sem a necessidade de se resolver a equação diferencial. Uma abordagem completa e mais detalhada pode ser encontrada nos livros citados nas referências bibliográficas.

Definição 3.0.1 A transformada (unilateral) de Laplace é dada por

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{0^-}^N f(t)e^{-st} dt$$

em que $s = \sigma + j\omega$ é uma variável complexa.

Essa integral convergirá absolutamente sempre que

$$|f(t)|e^{-\sigma t} \rightarrow 0 \quad \text{com} \quad t \rightarrow \infty.$$

Se esse limite for a zero para $\sigma > \sigma_c$ e divergir para $\sigma < \sigma_c$, então σ_c será chamado de abscissa de convergência.

3.1 Transformada de funções básicas

Esta seção apresenta a transformada de Laplace de algumas funções comuns.

1. Função exponencial. Seja $\alpha > 0$. Considere a função $f(t)$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & , \text{ se } t \geq 0 \\ 0 & , \text{ se } t < 0 \end{cases}$$

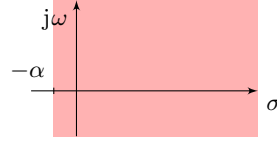
Então, a sua transformada de Laplace é dada por

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} Ae^{-\alpha t} e^{-st} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+s)t} dt$$

Note que essa integral converge se $\alpha + \sigma > 0$, ou seja, $\sigma > -\alpha$. Assim, a abscissa de convergência é $\sigma_c = -\alpha$. Portanto, a região de convergência, apresentada na Figura 3.1, é o semiplano direito delimitado pela reta $s = -\alpha + j\omega$, com $\omega \in \mathbb{R}$.

¹Existe uma transformada bilateral de Laplace. Sua relação com a versão unilateral e implicações sobre causalidade são discutidas no Apêndice A.9.

²Uma revisão sucinta de números complexos e funções de variáveis complexas encontra-se no Apêndice A.1.

Figura 3.1: Região de convergência no plano s .

Prosseguindo com a integração, tem-se

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] = A \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+s)t} dt = \frac{-A}{\alpha+s} e^{-(\alpha+s)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{-A}{\alpha+s} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\alpha+s)t} + \frac{Ae^0}{\alpha+s} = \frac{A}{\alpha+s} \end{aligned}$$

Essa função tem uma singularidade (polo) em $s = -\alpha$.

Vale salientar que a função $F(s)$ é válida para todo o plano s exceto em $s = -\alpha$, ou seja, a transformada de Laplace é válida mesmo fora da região de convergência. Isso se deve ao teorema da extensão analítica (também conhecido como teorema da continuação analítica).

2. Função degrau unitário dada por

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } t > 0 \\ 0 & , \text{ se } t < 0 \end{cases}$$

Sua transformada de Laplace é dada por

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

A função degrau unitário, também conhecida como função de Heaviside, é usualmente denotada por $\mu(t)$. Ela não está sendo definida em $t = 0$, porém é comum assumir que $\mu(0) = 0$ ou $\mu(0) = 1$.

3. Função rampa dada por

$$f(t) = \begin{cases} t & , \text{ se } t \geq 0 \\ 0 & , \text{ se } t < 0 \end{cases}$$

Sua transformada de Laplace é dada por

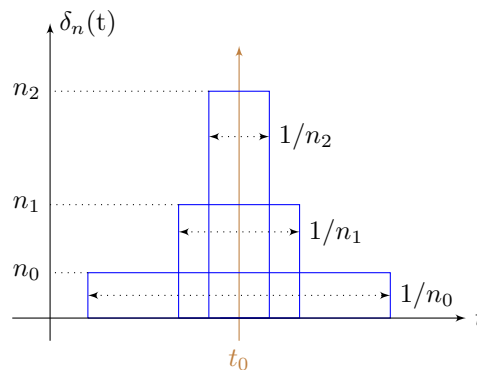
$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2}$$

Prova. Integrando por partes, tem-se

$$\int_0^{\infty} te^{-st} dt = t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} dt = \frac{1}{s^2}$$

■

4. Função impulso unitário.

Figura 3.2: Sequência de pulsos $\delta_n(t)$ de área unitária.

Seja a função pulso de área unitária, centrada em t_0 , dada por

$$\delta_n(t) = \begin{cases} n & , \text{ se } t_0 - \frac{1}{2n} \leq t \leq t_0 + \frac{1}{2n} \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

cuja representação gráfica encontra-se na Figura 3.2. Note que à medida que a largura $1/n$ do pulso $\delta_n(t)$ diminui, sua altura n aumenta proporcionalmente de forma a manter a área unitária. Assim, a função delta de Dirac³ pode ser definida (informalmente) como sendo

$$(3.1) \quad \delta(t - t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t)$$

Algumas propriedades do delta de Dirac são:

- (a) $\delta(t - t_0) = 0$, para $t \neq t_0$;
- (b) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$;
- (c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$;
- (d) $\delta(\alpha t) = \frac{\delta(t)}{|\alpha|}$, para $\alpha \neq 0$.

Aplicando a transformada de Laplace na função delta de Dirac, tem-se:

$$F(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

Observação 3.1.1 A integral indefinida de $\delta(t)$ fornece a função Heaviside que é igual a 0 para $t < 0$ e 1 para $t > 0$, porém como distribuição, ela é definida apenas dentro de uma integral. Assim, tem-se que $\int \delta(t - t_0) = \mu(t - t_0)$ e $\mu'(t - t_0) = \delta(t - t_0)$. Nesta apostila, será usada indistintamente a notação $\mu(t)$ para denotar tanto o degrau unitário como a função Heaviside.

Observação 3.1.2 A função $\delta_n(t)$ acima não é a única função que pode ser usada para expressar o impulso. Por exemplo, a função gaussiana $\delta_n(t)$ apresentada na Figura 3.3 pode ser usada para definir o impulso⁴ (informalmente) como sendo $\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t)$.

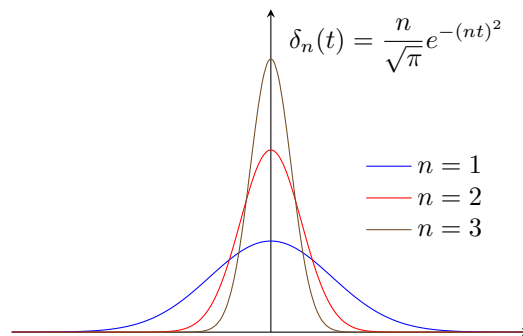


Figura 3.3: Sequência de funções $\delta_n(t)$ de área unitária.

5. Função senoidal. Seja $\omega > 0$. Considere a função $f(t)$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\omega t) & , \text{ se } t \geq 0 \\ 0 & , \text{ se } t < 0 \end{cases}$$

³O delta de Dirac não é na realidade uma função em seu sentido clássico, é uma distribuição, que é uma generalização do conceito de função que permite manipular singularidades. Note que limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t)$ propriamente dito não existe, a sequência δ_n pode ser interpretada como a sequência de funções normalizadas $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) dt = 1$ tal que a sequência de integrais tem o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) f(t) dt = f(0)$.

⁴Veja a nota de rodapé 3.

Então, a sua transformada de Laplace é dada por

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \left(\int_0^{\infty} e^{-(s-j\omega)t} dt - \int_0^{\infty} e^{-(s+j\omega)t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left(\left. \frac{-e^{-(s-j\omega)t}}{s-j\omega} \right|_0^{\infty} + \left. \frac{e^{-(s+j\omega)t}}{s+j\omega} \right|_0^{\infty} \right) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

3.2 Propriedades da transformada de Laplace

A seguir são apresentadas algumas propriedades da transformada de Laplace⁵.

1. Linearidade. Se $F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)]$ e $F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)]$, então

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$$

2. Função transladada no tempo. Considere a função $f(t)$ e sua translação de $\alpha \geq 0$ apresentados na Figura 3.4, em que $\mu(t)$ representa o degrau unitário.

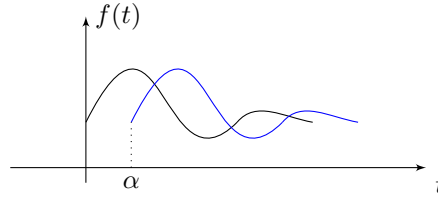


Figura 3.4: Função $f(t)$ e sua translação $f(t - \alpha) \mu(t - \alpha)$ (em azul).

A transformada de Laplace dessa função transladada é dada por

$$\mathcal{L}[f(t - \alpha) \mu(t - \alpha)] = \int_0^{\infty} f(t - \alpha) \mu(t - \alpha) e^{-st} dt$$

Aplicando a substituição de variável $\tau = t - \alpha$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t - \alpha) \mu(t - \alpha)] &= \int_{-\alpha}^{\infty} f(\tau) \mu(\tau) e^{-s(\tau+\alpha)} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} e^{-s\alpha} d\tau = e^{-s\alpha} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= e^{-s\alpha} \mathcal{L}[f(t)] = e^{-s\alpha} F(s) \end{aligned}$$

em que $F(s)$ é a transformada de Laplace da função $f(t)$.

Exemplo 3.2.1 Considere a função pulso retangular apresentada na Figura 3.5. Percebe-se que essa função pode ser escrita como a diferença de dois degraus, ou seja, $f(t) = \mu(t) - \mu(t - t_0)$.

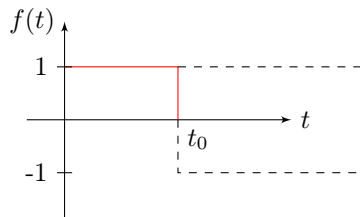


Figura 3.5: Função pulso retangular.

⁵O Apêndice A.8 apresenta uma tabela de transformadas de Laplace e suas propriedades.

Aplicando a transformada de Laplace, tem-se

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} - \mathcal{L}[\mu(t - t_0)] = \frac{1}{s} - e^{-t_0 s} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} (1 - e^{-t_0 s})$$

3. Teorema da derivação real:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

Prova. Integrando por partes, tem-se:

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = f(t) \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s} \frac{d}{dt}f(t) dt$$

Portanto

$$F(s) = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s} \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]$$

■

Exemplo 3.2.2 Prove que

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

Prova. Seja $g(t) = \frac{d}{dt}f(t)$. Aplicando o teorema da derivação real, tem-se:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}g(t)\right] = s\mathcal{L}[g(t)] - g(0) = s[sF(s) - f(0)] - \dot{f}(0)$$

■

Exemplo 3.2.3 De forma similar, pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \\ &= s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\dot{f}(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

em que $f^{(n)}$ representa a derivada enésima da função $f(t)$.

Exemplo 3.2.4 Considere a função $f(t) = \cos(\omega t)$, para $t \geq 0$. A transformada dessa função pode ser facilmente calculada como segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos(\omega t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{d \sin(\omega t)}{dt} \frac{1}{\omega}\right] = \frac{1}{\omega} s \mathcal{L}[\sin(\omega t)] - \sin(\omega t) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{s}{\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

4. Multiplicação de $f(t)$ por $e^{-\alpha t}$ (translação na frequência):

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+\alpha)t} dt = F(s + \alpha)$$

em que $F(s)$ é a transformada de Laplace da função $f(t)$.

Exemplo 3.2.5 Lembrando que a transformada de Laplace da função senoidal é

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)\mu(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

obtem-se

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \sin(\omega t)\mu(t)] = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

5. Teorema da derivação complexa⁶

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s)$$

Prova. Obtida diretamente da definição da transformada de Laplace. Assumindo $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, tem-se

$$\mathcal{L}[tf(t)] = \int_0^\infty tf(t)e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) \left(-\frac{d}{ds}e^{-st}\right) dt = -\frac{d}{ds} \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = -\frac{d}{ds}F(s)$$

■

Exemplo 3.2.6 A função cuja transformada de Laplace é

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)^3}$$

é obtida do teorema da derivação complexa, como segue. Lembrando que

$$\mathcal{L}[e^{-t}\mu(t)] = \frac{1}{(s+1)}$$

tem-se

$$\mathcal{L}[te^{-t}\mu(t)] = -\frac{d}{ds} \frac{1}{(s+1)} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Aplicando, novamente a propriedade, obtém-se

$$\mathcal{L}[t^2e^{-t}\mu(t)] = -\frac{d}{ds} \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{2}{(s+1)^3}$$

Consequentemente,

$$f(t) = t^2 e^{-t}, \quad t \geq 0$$

Observe que a propriedade da translação na frequência poderia também ter sido utilizada.

6. Integral de convolução. A convolução $f(t) * g(t)$, entre os sinais $f(t)$ e $g(t)$, é definida como sendo

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau) d\tau = g(t) * f(t)$$

Assim, assumindo que $f(t) = g(t) = 0$ para $t < 0$ e aplicando a transformada de Laplace, obtém-se

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s)G(s) = G(s)F(s) = \mathcal{L}[g(t) * f(t)]$$

Observação 3.2.1 Note que um sinal contínuo qualquer pode sempre ser escrito como sendo a convolução dele próprio com o impulso, ou seja,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau) d\tau$$

7. Teorema do valor final. Se $f(t) = 0$ para $t < 0$, e $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ for finito, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Exemplo 3.2.7 Suponha que $F(s)$ seja dada por

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Calcule o limite de $f(t)$ quando $t \rightarrow \infty$. Assumindo que este limite seja finito, pelo teorema do valor final, tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+1} = 1$$

Esse resultado é facilmente verificável, pois

$$f(t) = 1 - e^{-t}, \quad t \geq 0$$

⁶É possível mostrar, de forma mais geral, que $\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$.

8. Teorema do valor inicial. Se $f(t) = 0$ para $t < 0$, e $f(t)$ não contiver impulsos em $t = 0$, então,

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Exemplo 3.2.8 Suponha que $F(s)$ seja dada por

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

O limite de $f(t)$ quando $t \rightarrow 0^+$ pode ser calculado como segue:

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s+1} = 0$$

3.3 A inversa da transformada de Laplace

Embora existam diferentes formas de se obter a inversa da transformada de Laplace, esta seção apresenta o método da expansão (ou decomposição) em frações parciais, que é a abordagem mais clássica para essa finalidade. Esse método é usado para decompor uma função racional

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

que é uma função que pode ser escrita como quociente de polinômios, ambos na mesma variável s , em frações mais simples dadas por

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_n(s)$$

tal que a inversa da transformada de Laplace dos $F_j(s)$ seja de fácil solução. Assim

$$f(t) := \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] + \dots + \mathcal{L}^{-1}[F_n(s)]$$

Note ainda que a função $F(s)$ pode ser reescrita como

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

em que os valores z_i que zeram a função são obviamente denominados de zeros de $F(s)$. Já os valores p_i que causam uma singularidade em $F(s)$ são denominados de polos. Os polos são elementos essenciais na determinação da estabilidade do sistema, como será visto na Seção 3.7.

Para efetuar essa decomposição, as seguintes hipóteses são necessárias:

1. Os polinômios $P(s)$ e $Q(s)$ só possuem coeficientes reais;
2. Os polinômios $P(s)$ e $Q(s)$ não possuem fatores em comum;
3. O grau do numerador m é estritamente menor do que o grau do denominador n (ou seja $m < n$).

Observação 3.3.1 Note que a primeira hipótese implicará que os polos complexos de $F(s)$, caso existam, só podem aparecer em pares complexos conjugados. A segunda hipótese não é restritiva, pois caso $F(s)$ possua fatores comuns, por exemplo $(s - z_1) = (s - p_2)$, então, esses fatores se cancelam e efetua-se a decomposição de uma nova $F(s)$ sem esses termos. A última hipótese também não apresenta perda de generalidade, já que uma função racional $F(s) = P(s)/Q(s)$ com $n = m$ pode ser reescrita como $F(s) = D + \bar{P}(s)/\bar{Q}(s)$, em que D é uma constante e o grau de $\bar{P}(s)$ é estritamente menor do que o grau de $\bar{Q}(s)$.

Dependendo das raízes de $Q(s)$, dois casos podem ocorrer. Primeiro, será tratado o caso em que os polos de $F(s)$ são raízes simples de $Q(s)$, ou seja, todos os polos são distintos. Em seguida, será apresentado o caso em que os polos de $F(s)$ contêm raízes múltiplas de $Q(s)$.

3.3.1 Expansão em frações parciais: polos distintos

Considerando que os polos da função $F(s)$ são distintos, pode-se reescrevê-la como

$$(3.2) \quad F(s) = \frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{c_k}{s-p_k} + \cdots + \frac{c_n}{s-p_n}$$

em que c_k é o resíduo do polo p_k em $s = p_k$. Para determinar o coeficiente c_k , com $k = 1, \dots, n$, procede-se como segue. Primeiramente, multiplica-se (3.2) em ambos os lados por $(s - p_k)$, obtendo

$$(s - p_k)F(s) = \frac{c_1(s - p_k)}{s - p_1} + \frac{c_2(s - p_k)}{s - p_2} + \cdots + c_k + \cdots + \frac{c_n(s - p_k)}{s - p_n}$$

Calculando essa expressão em $s = p_k$, obtém-se

$$c_k = [(s - p_k)F(s)]_{s=p_k}$$

Como $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{c_k}{s - p_k} \right] = c_k e^{p_k t} \mu(t)$, tem-se

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \cdots + c_k e^{p_k t} + \cdots + c_n e^{p_n t}, \quad t \geq 0$$

Exemplo 3.3.1 Suponha que $F(s) = \frac{s+2}{s^2+1}$. Assim,

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s+2}{(s+j)(s-j)} = \frac{c_1}{s+j} + \frac{c_2}{s-j} \\ &= \frac{c_1(s-j) + c_2(s+j)}{(s+j)(s-j)} = \frac{(c_1+c_2)s + j(c_2-c_1)}{(s+j)(s-j)} \end{aligned}$$

O que implica que

$$c_1 + c_2 = 1, \quad e \quad c_2 - c_1 = 2/j = -2j$$

Resolvendo essas duas equações, determina-se $c_1 = 1/2 + j$ e $c_2 = 1/2 - j$. Portanto,

$$F(s) = \frac{1/2+j}{s+j} + \frac{1/2-j}{s-j}$$

Aplicando a inversa da transformada de Laplace, obtém-se

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = (1/2+j)e^{-jt} + (1/2-j)e^{jt} = \cos(t) + 2\sin(t), \quad t \geq 0$$

3.3.2 Expansão em frações parciais: polos múltiplos

O procedimento é bastante similar ao adotado no caso anterior e será apresentado através de um exemplo. Considere a seguinte função

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3}$$

Como $F(s)$ possui três polos múltiplos em $s = -1$, é necessário decompor $F(s)$ em três termos como segue:

$$F(s) = \frac{c_1}{(s+1)} + \frac{c_2}{(s+1)^2} + \frac{c_3}{(s+1)^3}$$

Multiplicando ambos os lados por $(s+1)^3$, tem-se

$$(3.3) \quad (s+1)^3 F(s) = c_1(s+1)^2 + c_2(s+1) + c_3$$

Portanto,

$$c_3 = [(s+1)^3 F(s)]_{s=-1}$$

Para se determinar os outros coeficientes, deriva-se a equação (3.3), que fornece

$$\frac{d}{ds} [(s+1)^3 F(s)] = c_2 + 2c_1(s+1)$$

Portanto,

$$c_2 = \frac{d}{ds} [(s+1)^3 F(s)]_{s=-1}$$

De forma similar, determina-se o termo c_1 :

$$\frac{d^2}{ds^2} [(s+1)^3 F(s)]_{s=-1} = 2c_1$$

Para o exemplo, em que

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3} \quad \Rightarrow \quad (s+1)^3 F(s) = s^2 + 2s + 3$$

tem-se

$$c_3 = [(s+1)^3 F(s)]_{s=-1} = [s^2 + 2s + 3]_{s=-1} = 2$$

$$c_2 = \frac{d}{ds} [s^2 + 2s + 3]_{s=-1} = [2s + 2]_{s=-1} = 0$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} [s^2 + 2s + 3]_{s=-1} = 1$$

Portanto,

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+1)^3}$$

Aplicando a inversa da transformada de Laplace, tem-se

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{(s+1)^3} \right] = e^{-t} + t^2 e^{-t} = (1+t^2)e^{-t}, \quad t \geq 0$$

Observe que o segundo termo foi obtido usando o teorema da derivação complexa

$$\mathcal{L}[tf(t)\mu(t)] = -\frac{d}{ds} F(s)$$

Para a função $F(s) = \frac{1}{s+a}$, cuja inversa é $f(t) = e^{-at}\mu(t)$, tem-se

$$\mathcal{L}[te^{-at}\mu(t)] = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s+a} = \frac{1}{(s+a)^2}$$

Portanto, se $F(s) = 1/(s+a)^2$, sua inversa será $f(t) = te^{-at}$ para $t \geq 0$. De forma análoga, para $F(s) = 2/(s+1)^3$, tem-se $f(t) = t^2 e^{-t}$ para $t \geq 0$.

Considerando que $F(s)$ possui um polo de multiplicidade ℓ , ou seja, $p_1 = p_2 = \dots = p_\ell$, e os $n - \ell$ polos restantes são todos distintos, sua decomposição em frações parciais é dada por

$$F(s) = \frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{(s-p_1)^2} + \dots + \frac{c_\ell}{(s-p_1)^\ell} + \frac{c_{\ell+1}}{s-p_{\ell+1}} + \dots + \frac{c_n}{s-p_n}$$

Exemplo 3.3.2 Suponha que a função $F(s)$ seja dada por

$$F(s) = \frac{s^3 + s^2 - 16s + 20}{s^6 - 2s^5 - 8s^4 + 14s^3 + 11s^2 - 28s + 12} = \frac{(s-2)^2(s+5)}{(s-1)^3(s+2)^2(s-3)}$$

Essa função tem um polo em $p_1 = 1$ de multiplicidade $\ell = 3$, um polo em $p_2 = -2$ de multiplicidade $\ell = 2$ e um polo simples em $p_3 = 3$. Assim, sua decomposição em frações parciais tem a seguinte forma:

$$F(s) = \frac{c_1}{s-1} + \frac{c_2}{(s-1)^2} + \frac{c_3}{(s-1)^3} + \frac{c_4}{s+2} + \frac{c_5}{(s+2)^2} + \frac{c_6}{s-3}$$

em que os resíduos

$$c_1 = -\frac{11}{27}, \quad c_2 = \frac{2}{3}, \quad c_3 = -\frac{1}{3}, \quad c_4 = \frac{248}{675}, \quad c_5 = \frac{16}{45}, \quad c_6 = \frac{1}{25}$$

foram calculados como segue:

1. $c_1 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} [F(s)(s-1)^3]_{s=1} = -\frac{16(3s^3 - 33s^2 + 97s - 100)}{(s-3)^3(s+2)^4} \Big|_{s=1} = -\frac{11}{27}$
2. $c_2 = \frac{d}{ds} [F(s)(s-1)^3]_{s=1} = \frac{8(2s^2 - 15s + 22)}{(s-3)^2(s+2)^3} \Big|_{s=1} = \frac{2}{3}$
3. $c_3 = F(s)(s-1)^3 \Big|_{s=1} = \frac{(s-2)^2(s+5)}{(s+2)^2(s-3)} \Big|_{s=1} = -\frac{1}{3}$
4. $c_4 = \frac{d}{ds} [F(s)(s+2)^2]_{s=-2} = -\frac{s^4 + 4s^3 - 59s^2 + 170s - 152}{(s-3)^2(s-1)^4} \Big|_{s=-2} = \frac{248}{675}$
5. $c_5 = F(s)(s+2)^2 \Big|_{s=-2} = \frac{(s-2)^2(s+5)}{(s-1)^3(s-3)} \Big|_{s=-2} = \frac{16}{45}$
6. $c_6 = F(s)(s-3) \Big|_{s=3} = \frac{(s-2)^2(s+5)}{(s-1)^3(s+2)^2} \Big|_{s=3} = \frac{1}{25}$

3.4 Resolução de equações diferenciais usando a transformada de Laplace

Esta seção demonstra a aplicação da transformada de Laplace para a solução de algumas equações diferenciais ordinárias lineares.

Exemplo 3.4.1 Determine a solução da seguinte equação diferencial de primeira ordem não homogênea:

$$\tau \dot{v}(t) + v(t) = x(t), \quad v(0) = v_0$$

Denotando por $V(s)$ a transformada de Laplace de $v(t)$, ou seja, $V(s) = \mathcal{L}[v(t)]$ e lembrando que $\mathcal{L}[\dot{v}(t)] = sV(s) - v_0$, tem-se

$$\tau sV(s) - \tau v_0 + V(s) = \frac{E}{s}$$

Equivalentemente, tem-se

$$V(s) = \frac{\tau v_0}{\tau s + 1} + \frac{E}{s(\tau s + 1)} = \frac{\tau v_0}{\tau s + 1} + E \left(\frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1} \right)$$

Aplicando a inversa da transformada de Laplace, tem-se

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau} + E(1 - e^{-t/\tau}), \quad t \geq 0$$

que é mesma a solução determinada em (2.9).

Exemplo 3.4.2 Determine a solução da seguinte equação diferencial homogênea:

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0$$

Lembrando que $\mathcal{L}[\ddot{y}(t)] = s^2 Y(s) - sy_0 - \dot{y}_0$, tem-se

$$m(s^2 Y(s) - sy_0 - \dot{y}_0) + kY(s) = 0 \quad \implies \quad (ms^2 + k)Y(s) = my_0 s + m\dot{y}_0$$

Portanto

$$Y(s) = y_0 \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} + \dot{y}_0 \frac{1}{s^2 + \omega_n^2}, \quad \omega_n^2 = k/m$$

cuja inversa da transformada de Laplace fornece

$$(3.4) \quad y(t) = y_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{y}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t), \quad t \geq 0$$

que é exatamente a mesma solução obtida em (2.20).

Exemplo 3.4.3 Determine a resposta ao impulso da seguinte equação diferencial:

$$\dot{y}(t) + a_1 y(t) = x(t)$$

Aplicando a transformada de Laplace, com condições iniciais nulas, tem-se

$$(s + a_1)Y(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s + a_1}$$

cuja inversa da transformada de Laplace fornece

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{-a_1 t}, \quad t \geq 0$$

Exemplo 3.4.4 Determine a resposta ao impulso da seguinte equação diferencial:

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = \delta(t), \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

Aplicando a transformada de Laplace, tem-se

$$(ms^2 + k)Y(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1/m}{s^2 + \omega_n^2}, \quad \omega_n^2 = k/m$$

cuja inversa da transformada de Laplace fornece

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{m\omega_n} \sin(\omega_n t), \quad t \geq 0$$

Definição 3.4.1 A resposta ao impulso de um sistema, geralmente denominada por $h(t)$, é de grande importância na análise linear de sistemas. A resposta ao impulso $h(t)$ é calculada com condições iniciais nulas, para um impulso aplicado no instante de tempo $t = 0$.

Exemplo 3.4.5 Determine a resposta ao impulso da seguinte equação diferencial:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = kx(t)$$

Embora não seja mandatório, é útil reescrever a equação acima na forma padrão

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t)$$

em que $\omega_n = \sqrt{k/m}$ e $\zeta = c/(2m\omega_n)$.

Aplicando agora a transformada de Laplace com condições iniciais nulas, obtém-se

$$s^2 Y(s) + 2\zeta\omega_n s Y(s) + \omega_n^2 Y(s) = \omega_n^2 X(s)$$

Portanto,

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} X(s)$$

Considerando que a entrada é um impulso $x(t) = \delta(t)$, ou seja, $X(s) = 1$, tem-se que

$$H(s) := \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Completando o quadrado, tem-se

$$H(s) = \left(\frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

em que $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$. Lembrando que

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \sin(\omega t) \mu(t)] = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

obtém-se a resposta ao impulso

$$h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t), \quad t \geq 0$$

Observação 3.4.1 Não é adequado calcular numericamente (de forma computacional) a resposta ao impulso usando diretamente a sua definição, uma vez que o impulso tem amplitude infinita. Porém, pode-se mostrar (ver Exercício 3.8.27) que é possível calcular numericamente a resposta ao impulso usando a equação diferencial homogênea com uma condição inicial apropriada.

Exemplo 3.4.6 Para o sistema massa-mola do Exemplo 3.4.4, a resposta ao impulso pode ser obtida usando-se a equação diferencial homogênea $m\ddot{y}(t) + ky(t) = 0$, com condição inicial $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 1/m$.

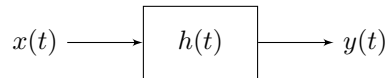
3.5 Resposta a uma excitação qualquer

A análise de sistemas lineares envolve frequentemente a determinação da resposta do sistema a variados tipos de entradas ou excitações. Esta seção apresenta uma abordagem para se obter a resposta de um sistema LTI a uma função de excitação arbitrária.

Conhecendo-se a resposta ao impulso $h(t)$ de um sistema LTI, sua resposta a um sinal de entrada $x(t)$ qualquer pode ser determinada através da operação de convolução entre $x(t)$ e $h(t)$. Inicialmente, considera-se o caso mais simples, no qual a entrada é aplicada enquanto o sistema está em repouso, resultando na chamada “resposta forçada”. Posteriormente, será derivada a solução completa.

3.5.1 Solução forçada

Considere o sistema linear, invariante no tempo, representado na figura abaixo, em que a entrada é $x(t)$, a saída é $y(t)$, e a resposta ao impulso é $h(t)$.



A resposta forçada desse sistema, que descreve a relação entrada-saída ignorando as condições iniciais, é dada pela seguinte **integral de convolução**:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau$$

Se o sistema for causal, então $h(t - \tau) = 0$ para $\tau > t$, e a integral se reduzirá a

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau)x(\tau) d\tau$$

No mais, se a entrada for nula para $t < 0$, ou seja $x(t) = 0$ para $t < 0$, então a solução forçada será

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau)x(\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau)x(t - \tau) d\tau$$

Exemplo 3.5.1 Considere o sistema descrito pela seguinte equação de movimento:

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = x(t)$$

em que $x(t)$ é o degrau de amplitude X_0 dado por

$$x(t) = X_0 \mu(t) = \begin{cases} X_0 & , \text{ se } t \geq 0 \\ 0 & , \text{ se } t < 0 \end{cases}$$

Sabe-se (do Exemplo 3.4.4) que a resposta ao impulso $h(t)$ desse sistema é

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n} \sin(\omega_n t) \mu(t), \quad \omega_n = \sqrt{k/m}$$

Assim, pela integral de convolução, tem-se que a solução forçada $y_f(t)$ é dado por

$$\begin{aligned} y_f(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{m\omega_n} \sin(\omega_n(t - \tau))\mu(t - \tau)X_0 \mu(\tau) d\tau = \frac{X_0}{m\omega_n} \int_0^t \sin(\omega_n(t - \tau)) d\tau \end{aligned}$$

fornecendo finalmente

$$(3.5) \quad y_f(t) = \frac{X_0}{k}(1 - \cos(\omega_n t)), \quad t \geq 0$$

3.5.2 Solução completa

Note que a integral de convolução fornece apenas a resposta forçada para uma excitação qualquer. Para se obter a solução completa do problema, deve-se considerar também as condições iniciais, ou seja, deve-se somar à solução forçada a solução homogênea, fornecendo

$$(3.6) \quad y(t) = g_0(t)y_0 + g_1(t)\dot{y}_0 + \cdots + g_{n-1}(t)y_0^{(n-1)} + \int_0^t h(t - \tau)x(\tau) d\tau$$

em que n é a ordem da equação diferencial e $y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ são suas n condições iniciais.

Exemplo 3.5.2 Suponha que o sistema do Exemplo 3.5.1 esteja sujeito às condições iniciais $y(0) = y_0$ e $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$. Assim, somando-se a solução homogênea (3.4) e a solução forçada (3.5), a resposta completa fica sendo

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{y}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + \frac{X_0}{k}(1 - \cos(\omega_n t)), \quad t \geq 0$$

Comparando essa expressão com (3.6), tem-se

$$g_0(t) = \cos(\omega_n t) \quad e \quad g_1(t) = \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n}$$

3.6 Função de transferência

A função de transferência é uma ferramenta fundamental para a análise de sistemas lineares e invariantes no tempo (LTI). Ela caracteriza completamente a relação entre a entrada e a saída de um sistema LTI no domínio da frequência. Conforme será visto, a função de transferência relaciona $Y(s)$, a transformada de Laplace do sinal de saída, com $X(s)$, a transformada de Laplace do sinal de entrada, para um sistema LTI, encapsulando assim suas propriedades dinâmicas. Ela nada mais é do que a transformada de Laplace da resposta ao impulso do sistema. Além disso, a função de transferência pode ser determinada diretamente aplicando-se Laplace à equação diferencial do sistema. Suas raízes, os polos e zeros, fornecem informações importantes sobre o sistema, em especial a sua estabilidade.

Aplicando a transformada de Laplace na integral de convolução

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau$$

obtém-se

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

Essa relação está expressa na Figura 3.6 abaixo.

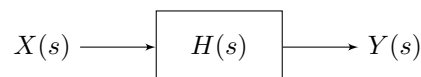


Figura 3.6: Relação entrada-saída no domínio da frequência.

A função $H(s) = Y(s)/X(s)$, que relaciona a transformada de Laplace do sinal de saída $y(t)$ com a transformada de Laplace do sinal de entrada $x(t)$, é denominada de função transferência. Perceba que para uma entrada impulsiva $X(s) = 1$, a saída é $Y(s) = H(s)$. Portanto, $H(s)$ é transformada de Laplace da resposta ao impulso $h(t)$, ou seja

$$H(s) = \int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-st} dt$$

A função de transferência também pode ser obtida diretamente da equação diferencial, considerando as condições iniciais nulas. Assim, aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação diferencial

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x$$

em que $y^{(n)}$ é a derivada enésima de $y(t)$, tem-se

$$[s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n]Y(s) = [b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m]X(s)$$

Portanto,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

Observação 3.6.1 A função de transferência $H(s)$ é denominada própria se $n \geq m$, estritamente própria se $n > m$ e imprópria se $m > n$. Assim, $H(s)$ é dita própria se $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s)$ existir e estritamente própria se esse limite for zero. Para que uma função de transferência seja realizável fisicamente é necessário que ela seja própria.

Observação 3.6.2 O ganho estático é dado por $H(0) = b_m/a_n$. Assim, se a entrada for $x(t) = X_0 \mu(t)$, um degrau de amplitude X_0 , e o sistema for assintoticamente estável, a saída atingirá o regime estacionário $y_\infty = H(0)X_0$.

Exemplo 3.6.1 Considere o mesmo sistema do Exemplo 3.5.1, dado por

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = x(t)$$

Para esse sistema, a transformada de Laplace da resposta ao impulso $h(t)$ e da entrada $x(t)$ são respectivamente dadas por

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + k} \quad e \quad X(s) = \frac{X_0}{s}$$

Assim

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{X_0}{s(ms^2 + k)} = \frac{X_0/m}{s(s^2 + \omega_n^2)} = \frac{X_0}{m\omega_n^2} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \right), \quad \omega_n^2 = k/m$$

cuja inversa da transformada de Laplace fornece a solução forçada

$$y_f(t) = \frac{X_0}{k}(1 - \cos(\omega_n t)), \quad t \geq 0$$

3.7 Conceitos de estabilidade

Esta seção apresenta alguns conceitos básicos de estabilidade de sistemas lineares contínuos invariantes no tempo. Primeiro, é realizada uma análise do comportamento da solução homogênea. Em seguida, é demonstrado que um sistema será estável se os polos de sua função de transferência estiverem localizados no semiplano esquerdo do plano complexo. Finalmente, a noção de estabilidade BIBO é introduzida.

3.7.1 Estabilidade da solução homogênea

Foi visto que a solução geral da equação diferencial homogênea é composta de termos da forma

$$y_h(t) = Ce^{\lambda t}, \quad \lambda = \sigma + j\omega$$

e, assim, a convergência dessa expressão depende essencialmente do valor da raiz λ . Usando a fórmula de Euler, essa raiz pode ser reescrita como

$$e^{\lambda t} = e^{\sigma t} (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))$$

Portanto, esse termo convergirá a zero sempre que $\sigma < 0$, ou seja, sempre que a raiz λ esteja localizada no semiplano esquerdo do plano complexo.

Observação 3.7.1 *Caso as raízes não sejam todas distintas e exista uma raiz de multiplicidade ℓ , então aparecerá termos da forma $t^{\ell-1}e^{\lambda t}$ e a análise não se alterará, já que se $\sigma < 0$ o termo $e^{\sigma t}$ decresce numa taxa mais rápida do que o termo $t^{\ell-1}$ cresce.*

3.7.2 Estabilidade a partir da função de transferência

Considere a seguinte função de transferência:

$$H(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

em que $n > m$, $p_1 = p_2 = \cdots = p_\ell$ é um polo de multiplicidade ℓ , e os $n - \ell$ polos restantes são todos distintos. Decompondo em frações parciais, tem-se

$$H(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{(s - p_1)^2} + \cdots + \frac{c_\ell}{(s - p_1)^\ell} + \frac{c_{\ell+1}}{s - p_{\ell+1}} + \cdots + \frac{c_n}{s - p_n}$$

Aplicando a inversa da transformada de Laplace e utilizando o resultado do Exercício 3.8.6, tem-se

$$(3.7) \quad h(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 t e^{p_1 t} + \cdots + c_\ell \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} e^{p_1 t} + c_{\ell+1} e^{p_{\ell+1} t} + \cdots + c_n e^{p_n t}, \quad t \geq 0$$

Portanto, para que $h(t)$ convirja a zero, com $t \rightarrow \infty$, é necessário que $\text{Re}(p_i) < 0$, para $i = 1, \dots, n$. Isso implica que todos os polos da função de transferência devem pertencer ao semiplano esquerdo aberto do plano complexo s , como apresentado na Figura 3.7.

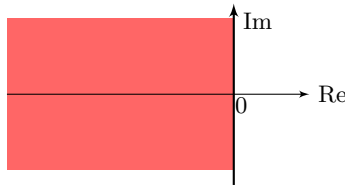


Figura 3.7: Região de estabilidade no plano complexo s .

Definição 3.7.1 *Um sistema linear invariante no tempo será assintoticamente estável se os polos p_i da função de transferência $H(s)$ satisfizerem $\text{Re}(p_i) < 0$, para $i = 1, \dots, n$.*

Observação 3.7.2 *Note que, de acordo com a definição 3.7.1, se um sistema linear invariante no tempo for assintoticamente estável, então sua resposta ao impulso dada por (3.7) convergirá a zero com $t \rightarrow \infty$.*

Observação 3.7.3 *De acordo com a observação 3.3.1, se a função de transferência $H(s)$ for própria, ou seja $n = m$, ela poderá ser reescrita como $H(s) = \bar{P}(s)/\bar{Q}(s) + D$, com D constante e o grau de $\bar{P}(s)$ estritamente menor do que o grau de $\bar{Q}(s)$. Assim, as condições de estabilidade assintótica requerem que a parte real dos polos de $\bar{Q}(s)$ seja estritamente menor que zero.*

3.7.3 Estabilidade BIBO

Um sistema é dito BIBO (Bounded Input Bounded Output) estável se toda entrada limitada produzir uma saída limitada. Um sinal $x(t)$ é limitado se existir um número finito M tal que $|x(t)| < M$ para todo t .

Lema 3.7.1 *Um sistema linear invariante no tempo é BIBO estável, se e somente se,*

$$\|h(t)\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

ou seja, se sua resposta ao impulso for absolutamente integrável.

Prova. Para provar a condição de suficiência, note que

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)| d\tau$$

Como $|x(t)| < M$ para qualquer t , então

$$|y(t)| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$$

Portanto, a saída $y(t)$ é limitada sempre que $h(t)$ for absolutamente integrável. ■

Lema 3.7.2 *Um sistema linear causal invariante no tempo é BIBO estável se, e somente se, for assintoticamente estável.*

Exemplo 3.7.1 *Mostre que o sistema abaixo não é BIBO estável e determine uma entrada $x(t)$ limitada tal que a saída $y(t)$ não seja limitada:*

$$\ddot{y}(t) + 4y(t) = x(t)$$

A função de transferência, que relaciona a transformada de Laplace da saída $y(t)$ com a transformada de Laplace da entrada $x(t)$ é dada por

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 4}$$

Note que esse sistema não é assintoticamente estável, já que os polos de $H(s)$, dados por $s = \pm 2j$, estão no eixo imaginário.

A resposta ao impulso para esse sistema é obtida aplicando-se um impulso na entrada, ou seja, $x(t) = \delta(t)$ e $X(s) = 1$. Nesse caso, tem-se que a saída é dada por

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 4}$$

Aplicando a inversa da transformada de Laplace, obtém-se

$$h(t) = 1/2 \sin(2t), \quad t \geq 0$$

Como $\|h(t)\|_1$ não é finita, conclui-se que o sistema não é BIBO estável. Portanto, existe uma entrada $x(t)$ limitada tal que $y(t)$ não seja limitada.

Considere a seguinte entrada:

$$x(t) = 2 \cos(2t), \quad t \geq 0$$

cuja transformada de Laplace é

$$X(s) = \frac{2s}{s^2 + 4}$$

Nesse caso, a saída $Y(s)$ é dada por

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{2s}{(s^2 + 4)^2}$$

A função $Y(s)$ possui polos múltiplos em $p_1 = 2j$ e $p_2 = -2j$. Sua decomposição em frações parciais é dada por

$$Y(s) = \frac{c_1}{(s - p_1)} + \frac{c_2}{(s - p_1)^2} + \frac{c_3}{(s - p_2)} + \frac{c_4}{(s - p_2)^2}$$

Os resíduos são dados por $c_1 = c_3 = 0$ e $c_2 = -j/4$, $c_4 = j/4$. Assim,

$$Y(s) = \frac{-j}{4(s - 2j)^2} + \frac{j}{4(s + 2j)^2}$$

Aplicando a inversa da transformada de Laplace, lembrando que

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\alpha}{(s + \beta)^2} \right] = \alpha t e^{-\beta t}, \quad t \geq 0$$

tem-se

$$y(t) = -\frac{j}{4} t e^{2jt} + \frac{j}{4} t e^{-2jt} = \frac{1}{2} t \sin(2t), \quad t \geq 0$$

3.8 Exercícios

Exercício 3.8.1 Apenas para este exercício, use a definição “bilateral” da transformada de Laplace dada por

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Assuma que $\alpha > 0$ e que $\mu(t)$ represente o degrau unitário. Assim:

1. Esboce o gráfico de $f(t) = e^{\alpha t} \mu(-t) + e^{-\alpha t} \mu(t)$;
2. Calcule $F(s)$.

Exercício 3.8.2 Prove a seguinte expressão:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta \left(\frac{\alpha t - t_0}{\beta} \right) f(t) dt = |\beta/\alpha| f(t_0/\alpha), \quad \text{com } \alpha \neq 0 \text{ e } \beta \neq 0$$

Exercício 3.8.3 Considere a definição padrão (“unilateral”) da transformada de Laplace $F(s)$ de um sinal $f(t)$ dada por

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Prove as seguintes propriedades:

1. $\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s)G(s)$, em que $f(t) = g(t) = 0$, $t < 0$
2. $\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} F(s)$
3. $\mathcal{L} \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$, em que $f^{(k-1)} = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(t)$
4. $\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
5. $\mathcal{L} \left[\frac{1}{t} f(t) \right] = \int_s^{\infty} F(\tau) d\tau$
6. $\mathcal{L}[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} F \left(\frac{s}{\alpha} \right)$
7. $\mathcal{L}[e^{-\alpha t} f(t)] = F(s + \alpha)$

Exercício 3.8.4 Usando a transformada de Laplace, calcule $y(t) = x(t) * h(t)$, em que $x(t)$ e $h(t)$ são

$$x(t) = \mu(t-3) - \mu(t-5) \quad e \quad h(t) = e^{-3t}\mu(t),$$

com $\mu(t)$ o degrau unitário.

Exercício 3.8.5 Mostre que

$$\mathcal{L}[t^n \mu(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Exercício 3.8.6 Mostre que

$$F(s) = \frac{1}{(s+a)^n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \quad f(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} & , \text{ se } t \geq 0 \\ 0 & , \text{ se } t < 0 \end{cases}$$

que pode equivalentemente ser escrito como

$$F(s) = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \quad f(t) = \begin{cases} t^n e^{-at} & , \text{ se } t \geq 0 \\ 0 & , \text{ se } t < 0 \end{cases}$$

Exercício 3.8.7 Prove o teorema do valor final e o teorema do valor inicial.

Exercício 3.8.8 Usando o teorema do valor inicial, determine $f(0)$ e $\dot{f}(0)$ para

$$F(s) = 1/(s+2)^2$$

Exercício 3.8.9 Usando o teorema do valor final, determine $f(\infty)$ sabendo que $F(s)$ é dada por

$$F(s) = 10/(s^2 + s)$$

Verifique o resultado calculando a inversa da transformada de Laplace de $F(s)$.

Exercício 3.8.10 Usando a propriedade da função transladada na frequência, mostre que:

$$1. \quad \mathcal{L} [e^{-\alpha t} \sin(\omega t) \mu(t)] = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$$

$$2. \quad \mathcal{L} [e^{-\alpha t} \cos(\omega t) \mu(t)] = \frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$$

Exercício 3.8.11 Determine a transformada de Laplace das seguintes funções:

1. $f(t) = e^{-0.4t} \cos(12t) \mu(t)$, com $\mu(t)$ o degrau unitário.
2. $f(t) = \sin(4t + \pi/3) \mu(t)$
3. $f(t) = \sin(\omega t) \cos(\omega t + \beta) \mu(t)$
4. $f(t) = te^{2-3t} \cos(5t) \mu(t)$
5. $f(t) = \mu(5t-3) + \delta(3t-5)$, com $\delta(t)$ o impulso unitário.
6. $f(t) = \cos(2t-1) \mu(2t-1)$

Exercício 3.8.12 Usando o método apresentado na Seção 3.3, determine a decomposição em frações parciais da função $Y(s)$ dada por

$$Y(s) = \frac{X_0/m}{s(s^2 + \omega_n^2)}, \quad \omega_n^2 = k/m$$

Em seguida, calcule $y(t)$ e compare com o resultado obtido no Exemplo 3.6.1.

Exercício 3.8.13 Seguindo os passos ilustrados na Seção 3.3, realize a expansão em frações parciais da função $H(s)$ dada por

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

e determine a respectiva função $h(t)$. Em seguida, compare com a resposta obtida no Exemplo 3.4.5.

Exercício 3.8.14 Seguindo os passos ilustrados na Seção 3.3, realize a expansão em frações parciais de

$$F_1(s) = \frac{s^6 - 3s^4 + 3s^2 - 1}{s^6 + 2s^4 + s^2}$$

e determine a respectiva função $f_1(t)$. Em seguida, mostre que $F_1(s)$ pode ainda ser decomposta como

$$F_2(s) = 1 - \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s^2 + 1} + \frac{8}{(s^2 + 1)^2}$$

Assim, determine a respectiva função $f_2(t)$ e mostre que ela é idêntica a $f_1(t)$.

Exercício 3.8.15 Determine a inversa da transformada de Laplace das seguintes funções:

1. $F(s) = s^2/(s^2 + s + 1)$
2. $F(s) = 1/(s(s^2 + \alpha s + \omega))$
3. $F(s) = 1/(s^2(s^2 + \omega^2))$
4. $F(s) = 1/(s^2 + 1)^2$
5. $F(s) = (s^2 - \omega^2)/(s^2 + \omega^2)^2$
6. $F(s) = \omega/(s^2 - \omega^2)$
7. $F(s) = (s + e^{-\alpha s})/s$

Exercício 3.8.16 Resolva as seguintes equações diferenciais usando a transformada de Laplace:

1. $\dot{x} + \alpha x = \delta(t), \quad x(0) = 0$
2. $\dot{x} + x = \beta \sin(\omega t), \quad x(0) = x_0$
3. $\ddot{x} + \omega_n^2 x = \beta \sin(\omega t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$
4. $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$
5. $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \mu(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$
6. $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \delta(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$
7. $2\ddot{x} + 10\dot{x} + 24x = 50e^{-2t} \cos(3t), \quad x(0) = 4, \quad \dot{x}(0) = 1$

Exercício 3.8.17 Prove que se $f(t)$ for uma função periódica de período T tal que $f(t) = 0$, para $t < 0$, e $f(t + nT) = f(t)$, para $t \geq 0$, então

$$F(s) := \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T f(t)e^{-st} dt$$

Dicas:

1. $\int_0^\infty \dots = \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} \dots$
2. $\sum_{n=0}^\infty e^{-nTs} = 1 + e^{-Ts} \sum_{n=0}^\infty e^{-nTs}$

Exercício 3.8.18 Usando o resultado do Exercício 3.8.17, mostre que

$$P(s) = \frac{e^{-Ts}(e^{Ts} - 1 - sT)}{Ts^2(1 - e^{-Ts})}$$

é a transformada de Laplace do sinal periódico dente de serra da Figura 3.8.

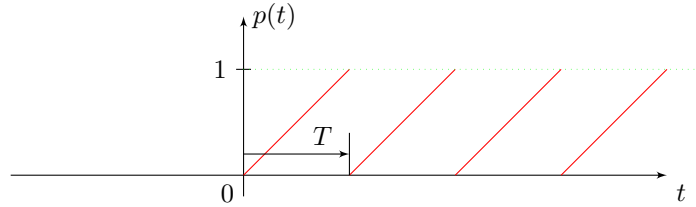


Figura 3.8: Função periódica dente de serra.

Exercício 3.8.19 Usando o resultado do Exercício 3.8.17, mostre que

$$F(s) = \frac{A(1 - e^{-\tau s})}{s(1 - e^{-Ts})}$$

é a transformada de Laplace da função periódica trem de pulsos da Figura 3.9.

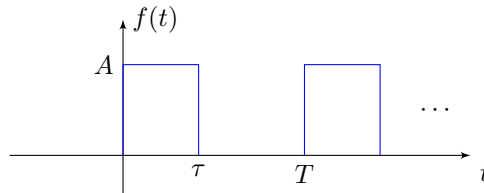


Figura 3.9: Trem de pulsos.

Exercício 3.8.20 Note que a função $P(s)$ do Exercício 3.8.18 e a função $F(s)$ do Exercício 3.8.19 não são funções racionais. Porém, é possível realizar uma aproximação racional usando a fórmula de Padé (ver Seção A.5 do Apêndice). Usando a aproximação de Padé de primeira ordem, determine uma aproximação racional $\hat{F}(s)$. Calcule a inversa de $\hat{F}(s)$ e compare o gráfico de $\hat{f}(t)$ com o trem de pulsos. Repita a análise usando aproximações de ordens 3 e 15.

Exercício 3.8.21 Mostre que a transformada de Laplace do trem de impulsos, de período T , é dada por:

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \Longleftrightarrow \quad P(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}$$

Exercício 3.8.22 Mostre que a convolução de uma função qualquer $g(t)$, para $t \geq 0$, com o trem de impulsos do Exercício 3.8.21 é dada por

$$x(t) = p(t) * g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g(t - nT)$$

Assim

$$X(s) = \frac{G(s)}{1 - e^{-Ts}}, \quad G(s) = \mathcal{L}[g(t)\mu(t)]$$

Exercício 3.8.23 Mostre que se um sistema linear invariante no tempo de segunda ordem for assintoticamente estável, então sua resposta homogênea (devido a uma condição inicial qualquer) convergirá a zero, com $t \rightarrow \infty$.

Exercício 3.8.24 Prove o Lema 3.7.2.

Exercício 3.8.25 Um sistema é dito estável no sentido “bounded input, bounded output” (BIBO), se qualquer entrada limitada $x(t)$ implicar uma saída limitada $y(t)$. Prove para um sistema linear invariante no tempo, que estabilidade BIBO é equivalente às seguintes condições:

1. sua resposta ao impulso $h(t)$ é absolutamente integrável.
2. sua resposta ao impulso $h(t) \rightarrow 0$ com $t \rightarrow \infty$.
3. os polos da função de transferência $H(s)$ encontram-se (estritamente) no semiplano esquerdo do plano complexo s .
4. as raízes da equação característica possuem parte real estritamente negativa.

Exercício 3.8.26 Mostre que a resposta de um sistema a uma entrada rampa unitária pode ser obtida como a integral da resposta ao degrau unitário.

Exercício 3.8.27 Mostre que a resposta ao impulso $h(t)$ pode ser calculada numericamente, de forma conveniente, usando a equação diferencial homogênea com uma condição inicial apropriada.

Exercício 3.8.28 Considere o circuito elétrico da Figura 3.10 abaixo.

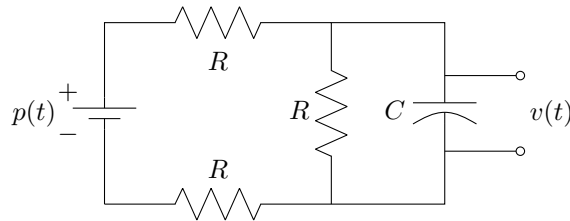


Figura 3.10: Circuito resistor-capacitor em paralelo.

Para esse circuito:

1. Determine a equação diferencial em termos da tensão v , considerando que $R = 620 \text{ [K}\Omega\text{]}$ e $C = 4.7 \text{ [}\mu\text{F}\text{]}$;
2. Encontre a resposta ao impulso $h(t)$;
3. Usando a integral de convolução, determine a tensão $v(t)$ para a entrada $p(t) = 3\mu(t) \text{ [V]}$;
4. Usando a transformada de Laplace, encontre a tensão de saída $v(t)$ para a entrada $p(t) = 3\mu(t) \text{ [V]}$ e condição inicial $v(0) = 0.7 \text{ [V]}$.

Exercício 3.8.29 Determine a resposta ao impulso do circuito elétrico resistor-capacitor, apresentado na Figura 3.11, cuja equação diferencial foi derivada em (2.4).

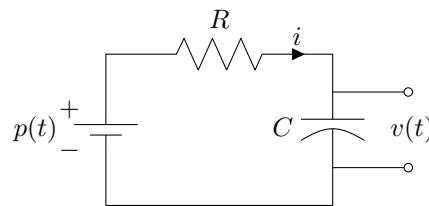


Figura 3.11: Circuito resistor-capacitor.

Exercício 3.8.30 Considere o circuito resistor-capacitor do Exercício 3.8.29. Usando a integral de convolução, mostre que a tensão $v(t)$ no capacitor para uma entrada em degrau de amplitude E e condição inicial nula é dada por

$$v(t) = E(1 - e^{-t/\tau}), \quad t \geq 0$$

Exercício 3.8.31 Considere o circuito resistor-capacitor do Exercício 3.8.29.

1. Suponha que a entrada $p(t)$ seja a função periódica dente de serra apresentada na Figura 3.8 do Exercício 3.8.18. Mostre que a resposta $V(s)$, no domínio da frequência, é dada por

$$V(s) = \frac{G(s)}{(1 - e^{-Ts})}, \quad G(s) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau}{s + 1/\tau} \right) (1 - e^{-Ts}) - \left(\frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1} \right) e^{-Ts}$$

2. Assim, mostre que a tensão $v(t)$ no capacitor é dada por

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g(t - nT)$$

em que $g(t)$, a inversa da transformada de Laplace de $G(s)$, é dada por

$$g(t) = \frac{1}{T} \left(t - \tau + \tau e^{-t/\tau} \right) \mu(t) - \frac{1}{T} \left(t - T - \tau + \tau e^{-(t-T)/\tau} \right) \mu(t - T) - \left(1 - e^{-(t-T)/\tau} \right) \mu(t - T)$$

3. Calcule a resposta, usando os valores numéricos $T = 3$ e $\tau = 1/2$. Mostre que o gráfico da tensão $v(t)$, para a entrada dente de serra, tem a forma da figura abaixo.

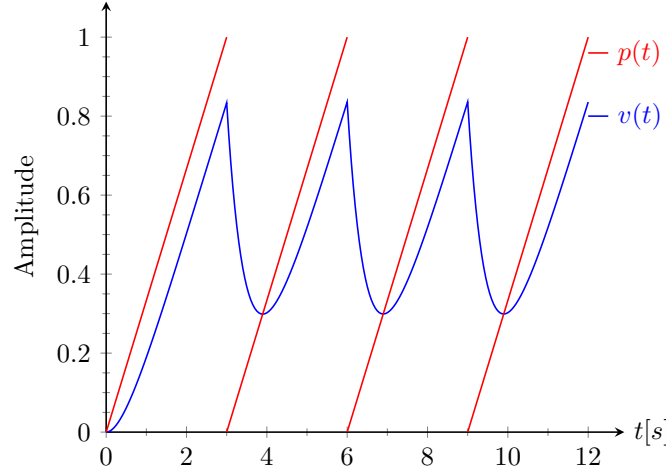


Figura 3.12: a) Onda dente de serra $p(t)$ (linha vermelha); b) resposta do sistema $v(t)$ (linha azul).

Exercício 3.8.32 Considere o sistema mecânico da Figura 3.13 abaixo.

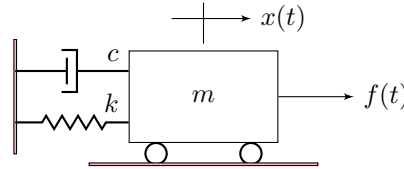


Figura 3.13: Sistema massa-mola-amortecedor.

1. Mostre que a resposta ao impulso é dada por

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t) \mu(t),$$

em que $\omega_n = \sqrt{k/m}$, $\zeta = c/(2m\omega_n)$ e $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$.

2. Mostre que a função de transferência $H(s)$ é dada por

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

3. Considerando $0 \leq \zeta < 1$, mostre que a resposta $X(s)$, no domínio da frequência, para a entrada em degrau $f(t) = \mu(t)$ tem a seguinte decomposição:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{ms} \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{c_1}{s} - \frac{c_2\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{c_3(s + \zeta\omega_n)}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned}$$

com

$$c_1 = \frac{1}{m\omega_n^2}, \quad c_2 = \frac{\zeta}{m\omega_d\omega_n}, \quad c_3 = \frac{1}{m\omega_n^2}$$

4. Assim, mostre que o deslocamento $x(t)$, no domínio do tempo, para a entrada $f(t) = \mu(t)$ é dada por

$$x(t) = c_1 - e^{-\zeta\omega_n t} (c_2 \sin \omega_d t + c_3 \cos \omega_d t), \quad t \geq 0$$

Exercício 3.8.33 Considere o sistema mecânico do Exercício 3.8.32.

1. Mostre que a resposta $X(s)$, no domínio da frequência, para o pulso retangular de largura τ (Figura 3.5 do Exemplo 3.2.1) é dada por

$$X(s) = L(s) (1 - e^{-\tau s}), \quad L(s) = \frac{1}{ms} \frac{1}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

2. Assim, mostre que o deslocamento $x(t)$ é dado por

$$x(t) = l(t)\mu(t) - l(t - \tau)\mu(t - \tau)$$

com

$$l(t) = c_1 - e^{-\zeta\omega_n t} (c_2 \sin \omega_d t + c_3 \cos \omega_d t)$$

e os coeficientes c_1 , c_2 e c_3 dados no item 3 do Exercício 3.8.32.

Exercício 3.8.34 Considere o sistema mecânico do Exercício 3.8.32.

1. Suponha que a entrada $f(t)$ seja o trem de pulsos, de amplitude A , largura τ e período T , apresentado na Figura 3.9 do Exercício 3.8.19. Mostre que a resposta $X(s)$, no domínio da frequência, é dada por

$$X(s) = \frac{A}{ms} \frac{1}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \frac{(1 - e^{-\tau s})}{(1 - e^{-Ts})}$$

ou de forma similar que

$$X(s) = A \frac{G(s)}{(1 - e^{-Ts})}, \quad G(s) = L(s) (1 - e^{-\tau s}), \quad L(s) = \frac{1}{ms} \frac{1}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

2. Assim, mostre que o deslocamento $x(t)$ é dado por

$$x(t) = A \sum_{n=0}^{\infty} g(t - nT)$$

em que $g(t)$ é dado por

$$g(t) = l(t)\mu(t) - l(t - \tau)\mu(t - \tau)$$

com

$$l(t) = c_1 - e^{-\zeta\omega_n t} (c_2 \sin \omega_d t + c_3 \cos \omega_d t)$$

e os coeficientes c_1 , c_2 e c_3 dados no item 3 do Exercício 3.8.32.

3. Considerando os valores numéricos dados no Exercício 3.8.32 para o sistema mecânico e considerando que o trem de pulsos tem amplitude $A = m\omega_n^2$, largura $\tau = 3/5$ e período $T = 1$, mostre que o gráfico de $x(t)$ tem a forma abaixo.

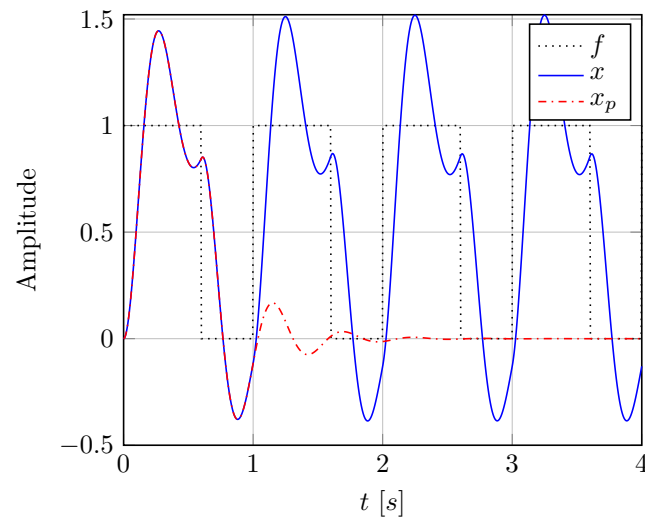


Figura 3.14: a) Trem de pulsos $f(t)$ de amplitude unitária (linha preta); b) resposta $x(t)$ ao trem de pulsos (linha azul); c) resposta $x_p(t)$ a um único pulso (linha vermelha).

Capítulo 4

Sistemas e Sinais Discretos

Dispositivos digitais são amplamente usados para o processamento e controle de informações em praticamente todas as áreas tecnológicas, já que a maioria dos dispositivos fabricados nas últimas décadas usam microprocessadores e, portanto, processam sinais digitais.

Para as aplicações em que são usados dispositivos digitais, é razoável modelar o sistema físico em questão, ou parte dele, como sendo um sistema a tempo discreto. É oportuno enfatizar que existem vários sistemas físicos cuja dinâmica por natureza pode ser diretamente modelada como um sistema a tempo discreto, tais como os sistemas econométricos, sistemas de negócios, sistemas biológicos, entre outros. Assim, é fundamental conhecer as técnicas de análise que podem ser aplicadas aos sistemas discretos.

4.1 Definição de alguns sinais discretos

Alguns eventos são de natureza puramente discreta, como o número de recém-nascidos, o valor diário de um determinado ativo na bolsa de valores, ou ainda uma coleção de observações feitas sequencialmente ao longo do tempo (uma série temporal). Porém, outros sinais discretos podem ter sua origem proveniente da discretização de um sinal contínuo $x(t)$ com uma taxa de amostragem $t = kT$, resultando assim numa sequência de pontos $x(k) = x(kT)$.

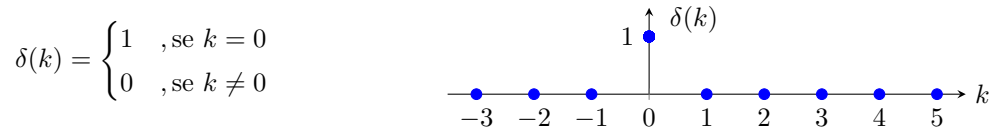
Em geral, uma sequência de pontos $x(k)$ é denotada por

$$\{x(k)\} = \{x(k), \quad k = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty\}$$

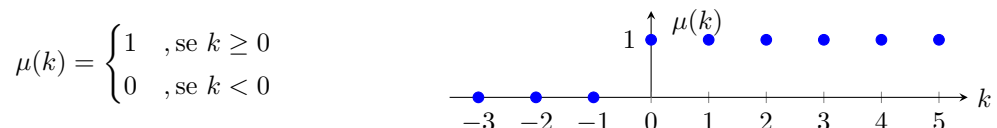
Porém, também será usada a notação $x(k)$ para também denotar a sequência $\{x(k)\}$ e não apenas o ponto específico $x(k)$, calculado no instante de tempo k . Isso não causará conflito, já que ficará claro através do contexto se $x(k)$ está denotando um ponto específico ou a sequência inteira.

A seguir são definidos os principais sinais discretos encontrados na análise de sistemas dinâmicos discretos.

1. Impulso unitário.



2. Degrau unitário.



3. Sequência exponencial $x(k) = a^k$.

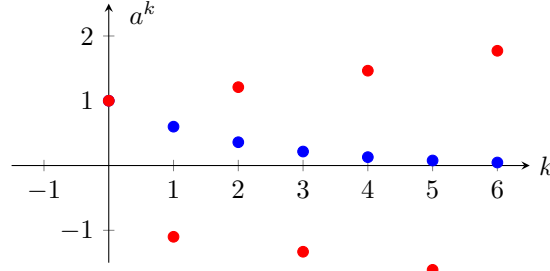


Figura 4.1: Sequência exponencial com $a = 0.6$ (azul) e $a = -1.1$ (vermelho).

4. Sequência senoidal $x(k) = \sin(\omega_0 k)$.

Um sinal discreto é dito periódico se

$$x(k) = x(k + P)$$

em que P é uma constante inteira. O período do sinal é o menor valor de $P > 0$ que satisfaça a condição de periodicidade. A sequência senoidal só será periódica se $\omega_0/(2\pi)$ for um número racional.

Exemplo 4.1.1 Considere o sinal $x(t) = \sin(\omega t)$, com $\omega = 1$ rad/s, apresentado na Figura 4.2.

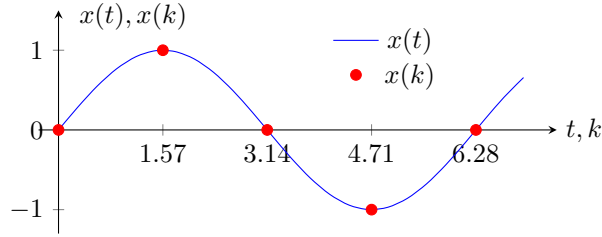


Figura 4.2: Sinal $x(t) = \sin(t)$ e sua discretização $x(k) = \sin(k\pi/2)$.

A frequência f [Hertz] de um sinal está relacionada com a frequência angular ω [rad/s] e o período T [s] através da relação $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$.

Discretizando esse sinal com uma taxa de amostragem $T_a = \pi/2$ [s], tem-se

$$t = kT_a = \frac{k\pi}{2}$$

Assim, a frequência de amostragem é

$$f_a = \frac{1}{T_a} = \frac{2}{\pi}$$

Portanto

$$x(k) := x(t)|_{t=kT_a} = x(kT_a) = \sin(\omega kT_a)$$

Para esse exemplo, em que $\omega = 1$ e $T_a = \pi/2$, tem-se

$$x(k) = \sin(k\pi/2) = \sin(\omega_0 k), \quad \omega_0 = \pi/2$$

Note que $\omega_0/(2\pi)$ é racional, já que $\omega_0/(2\pi) = 1/4$. Portanto, o período P do sinal discretizado é dado por $P = 2\pi/\omega_0 = 4$. Fato esse facilmente perceptível através de sua sequência

$$x(k) = \sin(k\pi/2) = \left\{ \dots \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \right\}$$

Esse mesmo resultado poderia ter sido obtido observando que se $x(k)$ é um sinal periódico de período P , então a expressão $x(k) = x(k + P)$ deve ser satisfeita. Assim, para $x(k) = \sin(k\pi/2)$, tem-se

$$x(k + P) = \sin\left((k + P)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{2}P\right)$$

que representará uma sequência periódica se

$$\frac{\pi}{2}P = 2\pi \quad \Rightarrow \quad P = 4$$

já que

$$x(k+P) = \sin\left(\frac{\pi}{2}k + 2\pi\right) = \sin(k\pi/2) = x(k)$$

Por outro lado, se for escolhida a taxa de amostragem $T_a = 1$ [s], o sinal amostrado $x(k) = \sin(k)$, cuja sequência de pontos

$$\left\{ \dots 0.00 \quad 0.84 \quad 0.91 \quad 0.14 \quad -0.76 \quad -0.96 \quad -0.28 \quad 0.66 \quad 0.99 \quad \dots \right\}$$

está apresentada na Figura 4.3, não representará uma sequência periódica.

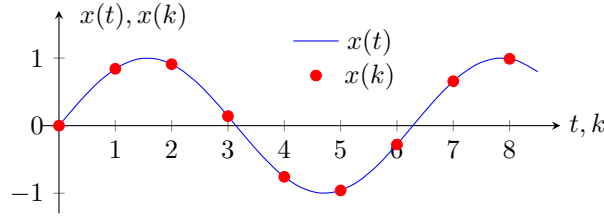


Figura 4.3: Sinal $x(t) = \sin(t)$ e sua discretização $x(k) = \sin(k)$.

4.2 Propriedades de sinais discretos

1. A convolução entre os sinais $x(k)$ e $y(k)$ é dada por

$$y(k) * x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(k-n)x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x(k-n)$$

Exemplo 4.2.1 A convolução entre os sinais $y(k) = \mu(k+2)$ e $x(k) = \delta(k-3)$ é dada por

$$y(k) * x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(k-n+2)\delta(n-3) = \mu(k-1)$$

Note que $\delta(m) = 0$ para $m \neq 0$; assim, a somatória acima se reduz a um único ponto dado por $n-3 = 0$, ou seja, $n = 3$.

Exemplo 4.2.2 A convolução entre os sinais $x(k) = \delta(k-1)$ e $y(k) = \mu(k-2) + \cos(k+1)$ é dada por

$$x(k) * y(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(k-n)y(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(k-n-1) [\mu(n-2) + \cos(n+1)]$$

Como $\delta(k-n-1)$ é dada por

$$\delta(k-n-1) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } n = k-1 \\ 0 & , \text{ se } n \neq k-1 \end{cases}$$

a somatória acima se reduz a um único termo $n = k-1$. Portanto,

$$x(k) * y(k) = \mu(k-1-2) + \cos(k-1+1) = \mu(k-3) + \cos(k)$$

2. Um sinal $x(k)$ qualquer pode sempre ser reescrito como sendo sua convolução com o impulso, ou seja,

$$x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(k-n)$$

Exemplo 4.2.3 Considere o sinal $x(k) = 2 \cos(4^{(k+3)}) (\mu(k+3) - \mu(k-4))$, visto na Figura 4.4.

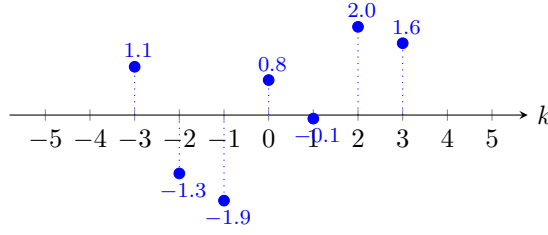


Figura 4.4: Sinal discreto $x(k) = 2 \cos(4^{(k+3)}) (\mu(k+3) - \mu(k-4))$.

Esse sinal pode ser reescrito como

$$x(k) = x(-3)\delta(k+3) + x(-2)\delta(k+2) + x(-1)\delta(k+1) + x(0)\delta(k) \\ + x(1)\delta(k-1) + x(2)\delta(k-2) + x(3)\delta(k-3)$$

ou de forma equivalente como

$$x(k) = 1.1\delta(k+3) - 1.3\delta(k+2) - 1.9\delta(k+1) + 0.8\delta(k) - 0.1\delta(k-1) + 2.0\delta(k-2) + 1.6\delta(k-3)$$

3. A energia de uma sequência é definida como sendo

$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x^*(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2$$

em que $x^*(k)$ é o complexo conjugado de $x(k)$.

Exemplo 4.2.4 A energia contida no sinal $x(k) = 2 \cos(4^{(k+3)}) (\mu(k+3) - \mu(k-4))$ é portanto

$$E = 1.1^2 + 1.3^2 + 1.9^2 + 0.8^2 + 0.1^2 + 2.0^2 + 1.6^2 = 13.72$$

4.3 Sistemas dinâmicos discretos

Os sistemas dinâmicos tratam da evolução de uma quantidade qualquer ao longo do tempo. Essa evolução pode ocorrer de forma contínua ou em intervalos de tempo discretos, quando são denominados de sistemas dinâmicos discretos. Esses sistemas são predominantes no processamento de sinais, dinâmica populacional, análise numérica, computação científica, economia, ciências da saúde, entre outras áreas do conhecimento.

Um modelo discreto representa fotografias instantâneas do comportamento dinâmico de um sistema ao longo do tempo. Esses registros, que descrevem a evolução das variáveis que determinam o estado do sistema, podem ocorrer uma vez por dia, uma vez a cada milissegundo, ou mesmo a intervalos de tempo irregulares. Porém, é preciso especificar uma regra que determina, dado o estado inicial, qual deve ser a sequência que resultará nos estados posteriores. Em geral, essa regra é descrita por **equações de diferenças** (também denominadas de **equações discretas**, **equações recursivas** ou **equações de recorrência**), que podem resultar da discretização de sistemas dinâmicos contínuos ou da modelagem de sistemas para os quais a escala de tempo já é intrinsecamente discreta.

Um dos modelos de equação de diferenças mais simples que existe é a equação de primeira ordem, dada por

$$(4.1) \quad y(k+1) = f(k, y(k)), \quad y(0) = y_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

em que $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função qualquer. Essa equação será linear se a função $f(\cdot, y)$ for linear em y . Uma solução dessa equação é uma sequência de números $y(0), y(1), y(2), \dots$ que satisfaz (4.1) para cada k .

4.3.1 Equação de diferenças de primeira ordem homogênea

Considere a equação de diferenças de primeira ordem homogênea dada por

$$(4.2) \quad y(k+1) = ay(k), \quad y(0) = y_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

A solução geral dessa equação homogênea é dada por

$$y(k) = Ca^k, \quad k \geq 0$$

em que C é uma constante arbitrária a ser determinada pela condição inicial. Sabendo que $y(0) = y_0$, tem-se que $C = y_0$ e a solução da equação de diferenças de primeira ordem homogênea é dada por

$$y(k) = a^k y_0, \quad k \geq 0$$

O comportamento de $y(k)$ no limite é dado por

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \begin{cases} 0 & , \text{se } |a| < 1 \\ y_0 & , \text{se } a = 1 \\ \text{não existe} & , \text{se } |a| > 1 \text{ ou } a = -1 \end{cases}$$

Portanto, a origem $y = 0$ é assintoticamente estável se e somente se $|a| < 1$. Note que se $a = -1$, a solução é a sequência periódica dada por $y(k) = \{y_0, -y_0, y_0, -y_0, y_0, \dots\}$, que claramente possui duas subsequências convergentes; uma que converge para y_0 e outra para $-y_0$.

4.3.2 Equação de diferenças de primeira ordem não homogênea

Considere a equação de diferenças de primeira ordem não homogênea dada por

$$(4.3) \quad y(k+1) = ay(k) + x(k), \quad y(0) = y_0, \quad k \geq 0$$

Suponha que o termo forçante (a entrada) seja o degrau dado por

$$x(k) = \begin{cases} b, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

De forma similar ao caso contínuo, a solução $y(k)$ dessa equação de diferenças não homogênea é

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k)$$

em que $y_h(k)$ é a solução geral da equação homogênea associada (4.2) e $y_p(k)$ é uma solução particular qualquer de (4.3).

Assuma que a solução particular de (4.3) para uma entrada constante tenha a forma

$$y_p(k) = \alpha, \quad k \geq 0$$

Então, substituindo essa expressão em (4.3), tem-se

$$\alpha = a\alpha + b$$

Considerando que $a \neq 1$, obtém-se

$$\alpha = \frac{b}{1-a}$$

e a solução particular para esse caso é

$$y_p(k) = \frac{b}{1-a}, \quad k \geq 0$$

Por outro lado, para tratar o caso $a = 1$, considera-se que a solução particular tem a forma

$$y_p(k) = k\alpha, \quad k \geq 0$$

Então, substituindo essa expressão em (4.3), tem-se

$$(k+1)\alpha = k\alpha + b$$

Portanto, $\alpha = b$ e a solução particular para esse caso é

$$y_p(k) = kb, \quad k \geq 0$$

Agora, para determinar a solução completa da equação de diferenças não homogênea, é necessário levar em consideração a solução geral da equação homogênea associada, que foi deduzida na Seção 4.3.1 anterior como sendo $y_h(k) = Ca^k$. Assim, para $a \neq 1$, tem-se

$$y(0) = y_0 = y_h(0) + y_p(0) = Ca^0 + \frac{b}{1-a} \implies C = y_0 - \frac{b}{1-a}$$

Já para $a = 1$, tem-se

$$y(0) = y_0 = y_h(0) + y_p(0) = Ca^0 \implies C = y_0$$

Portanto, a solução completa fica sendo

$$y(k) = \begin{cases} y_0 + kb & , \text{ se } a = 1 \\ \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^k + \frac{b}{1-a} & , \text{ se } a \neq 1 \end{cases}$$

que pode ainda ser reescrita de forma equivalente como

$$(4.4) \quad y(k) = \begin{cases} y_0 + kb & , \text{ se } a = 1 \\ y_0 a^k + \frac{1-a^k}{1-a} b & , \text{ se } a \neq 1 \end{cases}$$

Observe que a solução completa da equação de diferenças de primeira ordem não homogênea (4.3) pode também ser obtida por recursão, como segue. Sabendo que $y(0) = y_0$ e fazendo $k = 0$ na equação

$$y(k+1) = ay(k) + x(k)$$

com $x(k) = b$, tem-se $y(1) = ay_0 + b$. Assim, de forma análoga, para $k = 1, 2, 3, \dots$, obtém-se a sequência

$$\begin{aligned} y(1) &= ay(0) + b = ay_0 + b \\ y(2) &= ay(1) + b = a^2 y_0 + ab + b \\ y(3) &= ay(2) + b = a^3 y_0 + a^2 b + ab + b \\ &\vdots \end{aligned}$$

que pode ser expressa pela seguinte fórmula:

$$y(k) = y_0 a^k + (a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a + 1)b$$

Assim, se $a = 1$, tem-se

$$y(k) = y_0 + kb$$

Por outro lado, se $a \neq 1$, a expressão acima pode ser simplificada (ver Exercício 4.5.3) percebendo que

$$\sum_{n=0}^{k-1} a^n = 1 + a + \dots + a^{k-2} + a^{k-1} = \frac{1-a^k}{1-a}$$

Portanto, a solução (completa) da equação de diferenças de primeira ordem (4.3), para a entrada constante $x(k) = b$, é dada por

$$y(k) = \begin{cases} y_0 + kb & , \text{ se } a = 1 \\ y_0 a^k + \frac{1 - a^k}{1 - a} b & , \text{ se } a \neq 1 \end{cases}$$

que é exatamente a mesma solução obtida anteriormente.

Observação 4.3.1 É oportuno enfatizar¹ que $\lim_{a \rightarrow 1} \frac{1 - a^k}{1 - a} = k$. Assim, a solução acima pode ser expressa usando-se apenas a fórmula

$$y(k) = y_0 a^k + \frac{1 - a^k}{1 - a} b$$

já que para $a \rightarrow 1$, essa expressão se reduz a $y(k) = y_0 + kb$.

Observação 4.3.2 Como já enfatizado, a solução pode ser particionada numa parte homogênea e numa parte forçada dadas por

$$y(k) = \underbrace{y_0 a^k}_{\text{homogênea}} + \underbrace{\frac{1 - a^k}{1 - a} b}_{\text{forçada}}$$

ou ainda numa parte transiente e numa estacionária como segue

$$y(k) = \underbrace{\left(y_0 - \frac{b}{1 - a} \right) a^k}_{\text{transiente}} + \underbrace{\frac{b}{1 - a}}_{\text{permanente}}$$

Note que se $|a| < 1$, a parte transiente $(y_0 - b/(1 - a)) a^k$ converge para zero e a solução converge para o regime permanente $b/(1 - a)$.

Observação 4.3.3 Embora ainda não tenha sido mencionado, está sendo considerado de forma implícita que $a \neq 0$, já que para $a = 0$ a equação se reduz a $y(k + 1) = x(k)$, com $y(0) = y_0$, cuja solução é simplesmente a sequência $y(k) = \{y_0, x(0), x(1), x(2), \dots\}$.

A solução completa de (4.3), ou seja, da equação de diferenças de primeira ordem não homogênea

$$y(k + 1) = ay(k) + x(k), \quad k \geq 0$$

para uma entrada qualquer $x(k)$ e condição inicial $y(0)$ é dada por

$$(4.5) \quad y(k) = a^k y(0) + \sum_{n=0}^{k-1} a^{k-n-1} x(n), \quad k \geq 0$$

Pode-se facilmente provar essa fórmula por indução, como segue:

1. Para $k = 0$, a solução claramente satisfaz a condição inicial;
2. Considere que a solução é válida para um $k \geq 0$ qualquer, assim, tem-se

$$\begin{aligned} y(k + 1) &= a^{k+1} y(0) + \sum_{n=0}^k a^{k-n} x(n) \\ &= a a^k y(0) + \sum_{n=0}^{k-1} a^{k-n} x(n) + x(k) = a \left[a^k y(0) + \sum_{n=0}^{k-1} a^{k-n-1} x(n) \right] + x(k) \\ &= ay(k) + x(k) \end{aligned}$$

¹Esse resultado segue diretamente da regra de L'Hôpital.

Observação 4.3.4 Note que o termo $\sum_{n=0}^{k-1} a^{k-n-1}x(n)$ que aparece na solução (4.5) nada mais é do que a convolução da função $h(k) = a^{k-1}\mu(k-1)$, que é a resposta ao impulso (ver Exercício 4.5.8) do sistema (4.3) com a entrada $x(k)$, em que $x(k) = 0$ para $k < 0$.

Exemplo 4.3.1 Suponha que se deseje determinar a solução da equação de diferenças de primeira ordem

$$y(k+1) = ay(k) + x(k), \quad y(0) = y_0, \quad k \geq 0$$

em que o termo forçante é o pulso, de largura $\gamma > 0$, dado por

$$x(k) = \mu(k) - \mu(k - \gamma)$$

A solução homogênea já foi determinada, como sendo

$$y_h(k) = y_0 a^k \mu(k)$$

Assim, é preciso agora encontrar a solução forçada para a entrada $x(k)$. Para se obter essa solução, pode-se calcular separadamente a solução para cada um dos termos, $x_1(k) = \mu(k)$ e $x_2(k) = \mu(k - \gamma)$, da entrada $x(k) = x_1(k) - x_2(k)$ e, em seguida, somar os resultados obtidos. A resposta forçada $y_1(k)$ para o primeiro termo $x_1(k) = \mu(k)$ foi obtida acima como sendo

$$y_1(k) = \frac{1 - a^k}{1 - a} \mu(k)$$

Considerando agora a segunda componente da entrada, $x_2(k) = \mu(k - \gamma)$, a resposta forçada devido a $x_2(k)$ nada mais é do que um atraso γ aplicado à resposta forçada para a primeira entrada $x_1(k) = \mu(k)$, ou seja

$$y_2(k) = y_1(k - \gamma) = \frac{1 - a^{k-\gamma}}{1 - a} \mu(k - \gamma)$$

Portanto a solução completa é dada por

$$\begin{aligned} y(k) &= y_h(k) + y_1(k) - y_2(k) \\ &= y_0 a^k \mu(k) + \frac{1 - a^k}{1 - a} \mu(k) - \frac{1 - a^{k-\gamma}}{1 - a} \mu(k - \gamma) \end{aligned}$$

4.3.3 Equação de diferenças de segunda ordem

Considere a equação de diferenças de segunda ordem homogênea dada por

$$(4.6) \quad y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_2 y(k) = 0, \quad k \geq 0$$

com condições iniciais $y(0) = y_0$ e $y(1) = y_1$. Propondo-se a solução $y(k) = \lambda^k$ e substituindo-a na equação acima, obtém-se

$$\lambda^{k+2} + a_1 \lambda^{k+1} + a_2 \lambda^k = 0 \quad \implies \quad \lambda^k (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) = 0$$

Portanto, se λ satisfaz a equação característica

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

então λ^k é uma solução da equação de diferenças homogênea (4.6). Considerando que as duas raízes λ_1 e λ_2 são distintas, a solução tem a forma

$$(4.7) \quad y(k) = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k$$

É possível provar que essa solução é geral, mostrando que se pode escolher C_1 e C_2 de forma a satisfazer qualquer condição inicial $y(0) = y_0$ e $y(1) = y_1$. Substituindo as condições iniciais em (4.7), tem-se

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 + C_2 \\ y_1 &= C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 \end{aligned} \quad \implies \quad \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ a matriz acima é inversível, fornecendo

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Assim, a solução $y(k)$ para o caso de raízes distintas fica sendo

$$y(k) = \frac{y_1 - y_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_1^k + \frac{y_0\lambda_1 - y_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_2^k$$

Por outro lado, se as duas raízes da equação característica forem iguais, ou seja $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, pode-se sugerir como segunda solução

$$y(k) = k\lambda^k$$

fazendo com que a solução geral tenha a forma

$$y(k) = C_1\lambda^k + C_2k\lambda^k$$

Usando as condições iniciais $y(0) = y_0$ e $y(1) = y_1$, obtém-se

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 \\ y_1 &= C_1\lambda + C_2\lambda \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Se $\lambda \neq 0$, o sistema é inversível, fornecendo

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ -\lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Assim, a solução $y(k)$ para o caso de raízes repetidas fica sendo

$$y(k) = y_0\lambda^k + k(\lambda^{-1}y_1 - y_0)\lambda^k$$

Note que se as raízes repetidas forem nulas, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, o que ocorre unicamente se $a_1 = a_2 = 0$, a equação de diferenças se reduz a

$$y(k+2) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1$$

Nesse caso específico, a solução é claramente dada pela sequência de pontos $y(k) = \{y_0, y_1, 0, 0, 0, 0, \dots\}$.

4.3.4 Equação de diferenças de ordem n

Considere a equação de diferenças de ordem n não homogênea dada por

$$(4.8) \quad \sum_{i=0}^n a_i y(k+n-i) = \sum_{i=0}^m b_i x(k+m-i), \quad k \geq 0$$

com n condições iniciais dadas por $y(0) = y_0, y(1) = y_1, \dots, y(n-1) = y_{n-1}$. A solução dessa equação é $y(k) = y_h(k) + y_p(k)$, em que $y_h(k)$ é a solução geral da equação homogênea associada e $y_p(k)$ é uma solução particular qualquer.

A forma da solução geral $y_h(k)$ da equação homogênea associada

$$\sum_{i=0}^n a_i y(k+n-i) = 0$$

dependerá do tipo das n raízes da equação característica associada, como descrito a seguir:

- Se todas as raízes forem distintas, a solução geral terá a forma

$$y_h(k) = C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k + \dots + C_n\lambda_n^k$$

- Se houverem raízes múltiplas, por exemplo λ_1 com multiplicidade l , a solução geral terá a forma

$$y_h(k) = \sum_{i=1}^l C_i k^{i-1} \lambda_1^k + \sum_{i=l+1}^n C_i \lambda_i^k$$

A solução particular $y_p(k)$, por outro lado, dependerá da expressão para o termo forçante $x(k)$. Soluções particulares típicas estão apresentadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Soluções particulares típicas.

Termo forçante $x(k)$	Forma da solução particular $y_p(k)$
constante	α_0
k	$\alpha_0 + \alpha_1 k$
k^2	$\alpha_0 + \alpha_1 k + \alpha_2 k^2$
k^N	$\alpha_0 + \alpha_1 k + \dots + \alpha_N k^N$
$\cos(\omega k)$	$\beta_1 \cos(\omega k) + \beta_2 \sin(\omega k)$
$\sin(\omega k)$	$\beta_1 \cos(\omega k) + \beta_2 \sin(\omega k)$
r^k	αr^k

Observação 4.3.5 *Recorde que, para uma equação característica contendo uma raiz λ de multiplicidade ℓ , a solução geral da equação homogênea é formada combinando potências de k com λ^k . Utilizam-se, portanto, termos do tipo $C_1 \lambda^k$, $C_2 k \lambda^k$, até $C_\ell k^{\ell-1} \lambda^k$, em que cada C_i é uma constante a determinar.*

No tratamento da solução particular, diante de um termo forçante que também é uma raiz da equação característica, emprega-se uma abordagem similar. Se o termo forçante for k^N e a raiz da equação característica for 1, tendo multiplicidade ℓ , a forma da solução particular será um polinômio expresso por $\sum_{i=0}^{N+\ell} \alpha_i k^i$, com coeficientes α_i a determinar.

De forma equivalente, caso o termo forçante seja r^k , com r representando uma raiz de multiplicidade ℓ , a solução particular deverá englobar esse termo forçante acrescido por potências de k , isto é, assumirá a forma $\alpha k^\ell r^k$.

Essas construções asseguram que a solução particular se mantenha diferenciada da solução homogênea, possibilitando assim a resolução completa da equação de diferenças.

Exemplo 4.3.2 *Suponha que se deseje determinar a solução completa da equação de diferenças de segunda ordem não homogênea dada por*

$$y(k+2) + 2y(k+1) + y(k) = 3 \cos(k) + 5(-1)^k$$

com condições iniciais $y(0) = 0$ e $y(1) = -1$.

Sabe-se que a solução homogênea tem a forma

$$y_h(k) = \lambda^k$$

Assim, a equação característica fica sendo

$$(4.9) \quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

cujas raízes são repetidas, dadas por $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -1$. Dessa forma, a solução geral da homogênea fica sendo

$$y_h(k) = C_1(-1)^k + C_2 k(-1)^k$$

com C_1 e C_2 constantes a serem determinadas.

Tendo em vista que a função cosseno pode ser escrita como a soma de exponenciais imaginárias, é oportuno determinar a solução particular para a entrada $x(k) = r^k$. Para isso, é preciso diferenciar dois casos possíveis; a constante r sendo ou não uma raiz da equação característica (4.9).

Assumindo, primeiramente, que $r \neq -1$, ou seja, que r não é uma raiz da equação característica, a solução particular tem a forma

$$y_p(k) = \alpha r^k$$

Substituindo essa solução na equação de diferenças

$$(4.10) \quad y(k+2) + 2y(k+1) + y(k) = r^k$$

tem-se

$$r^k \alpha (r^2 + 2r + 1) = r^k$$

fornecendo

$$\alpha = \frac{1}{(r+1)^2}$$

Portanto, a solução particular fica sendo

$$y_p(k) = \frac{r^k}{(r+1)^2}$$

Por outro lado, assumindo que $r = -1$, ou seja, que r é uma raiz da equação característica, a solução particular para a entrada $x(k) = r^k$ tem a forma

$$y_p(k) = \alpha k^2 r^k = \alpha k^2 (-1)^k$$

Agora, substituindo essa solução na equação (4.10), tem-se

$$\begin{aligned} \alpha(k+2)^2 r^{k+2} + 2\alpha(k+1)^2 r^{k+1} + \alpha k^2 r^k &= r^k \\ r^k [\alpha[(k+2)^2 r^2 + 2(k+1)^2 r + k^2] - 1] &= 0 \end{aligned}$$

Assim, a constante α é dada por

$$\alpha = \frac{1}{(k+2)^2 - 2(k+1)^2 + k^2} = \frac{1}{2}$$

e a solução particular para a entrada $x(k) = (-1)^k$ fica sendo

$$y_p(k) = \frac{k^2 (-1)^k}{2}$$

Claramente, a solução particular para a entrada $x(k) = \cos(k)$, pode ser obtida usando-se o resultado acima para a entrada $x(k) = r^k$, observando que

$$x(k) = \cos(k) = \frac{e^{-jk} + e^{jk}}{2}$$

Assim, fazendo-se $r = e^{-j}$, tem-se

$$y_1(k) = \frac{e^{-jk}}{(e^{-j} + 1)^2}$$

Por outro lado, fazendo-se $r = e^j$, tem-se

$$y_2(k) = \frac{e^{jk}}{(e^j + 1)^2}$$

Portanto, a solução particular para a entrada $x(k) = \cos(k)$, fica sendo

$$y_p(k) = \frac{y_1(k) + y_2(k)}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-jk}}{(e^{-j} + 1)^2} + \frac{e^{jk}}{(e^j + 1)^2} \right) = \alpha \cos(k) + \beta \sin(k)$$

com

$$\alpha = \frac{1}{4} \sec^2 \left(\frac{1}{2} \right) \cos(1), \quad \beta = \frac{1}{4} \sec^2 \left(\frac{1}{2} \right) \sin(1)$$

Do exposto acima, a solução particular para a entrada

$$x(k) = 3 \cos(k) + 5(-1)^k$$

foi determinada como sendo

$$y_p(k) = 3(\alpha \cos(k) + \beta \sin(k)) + 5 \frac{k^2(-1)^k}{2}$$

Portanto, a solução completa fica sendo

$$y(k) = C_1(-1)^k + C_2k(-1)^k + 3(\alpha \cos(k) + \beta \sin(k)) + 5 \frac{k^2(-1)^k}{2}$$

Usando agora as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y(1) = -1$, tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + \frac{3}{4} \sec^2\left(\frac{1}{2}\right) \cos(1) \\ -1 &= -C_1 - C_2 + \frac{3}{4} \sec^2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

cujas soluções fornece

$$C_1 = -\frac{3}{4} \sec^2\left(\frac{1}{2}\right) \cos(1), \quad C_2 = 0$$

4.4 Propriedades de sistemas discretos

Considere o sistema representado na Figura 4.5, que relaciona um sinal de entrada $x(k)$ com o sinal de saída $y(k)$, através de um processo qualquer.



Figura 4.5: Sistema a tempo discreto.

Para esse sistema, as seguintes propriedades são definidas:

1. **Linearidade:** sejam $y_1(k)$ e $y_2(k)$ as saídas para as entradas $x_1(k)$ e $x_2(k)$, respectivamente. Então, o sistema é linear se a saída para a entrada

$$x(k) = \alpha x_1(k) + \beta x_2(k) \quad \text{for} \quad y(k) = \alpha y_1(k) + \beta y_2(k)$$

Exemplo 4.4.1 O sistema descrito pela equação de diferenças de primeira ordem

$$y(k+1) - y(k) = x(k), \quad y(0) = 0$$

é linear, já que

$$y(k) = \sum_{n=0}^{k-1} x(n) = \sum_{n=0}^{k-1} \alpha x_1(n) + \beta x_2(n) = \alpha \sum_{n=0}^{k-1} x_1(n) + \beta \sum_{n=0}^{k-1} x_2(n) = \alpha y_1(k) + \beta y_2(k)$$

Exemplo 4.4.2 O sistema descrito pela equação de diferenças

$$y(k+1)/y(k) = x(k), \quad y(0) = 1$$

não é linear. Note que para uma entrada constante qualquer $x(k) = c$, a saída é dada por

$$y(k) = c^k$$

que claramente é uma relação não linear, já que para $x(k) = c_1 + c_2$, tem-se

$$y(k) = (c_1 + c_2)^k \neq y_1(k) + y_2(k) = c_1^k + c_2^k$$

2. **Causalidade:** Um sistema é dito causal (não antecipativo), se a saída num instante de tempo τ depender apenas de valores da entrada em $k \leq \tau$.

Exemplo 4.4.3 O sistema $y(k) = \cos(k+1)x(k)x(k-3)$ é causal, já que a saída no instante $k = \tau$ depende da entrada no instante τ e no instante passado $\tau - 3$.

Exemplo 4.4.4 O sistema $y(k) = \cos(k)x(k+1)$ não é causal, já que a saída no instante $k = \tau$ depende da entrada no instante futuro $\tau + 1$.

3. **Invariância no tempo:** se $y(k)$ for a saída para uma entrada $x(k)$, então, $y(k-\tau)$ será a saída para a entrada $x(k-\tau)$.

Exemplo 4.4.5 Considere o sistema $y(k) = \sin(x(k))$. Então, para a entrada $x_1(k)$, tem-se

$$y_1(k) = \sin(x_1(k))$$

Seja $x_2(k) = x_1(k-\tau)$, então

$$y_2(k) = \sin(x_2(k)) = \sin(x_1(k-\tau)) = y_1(k-\tau)$$

Portanto, o sistema é invariante no tempo.

Exemplo 4.4.6 Considere o sistema $y(k) = kx(k)$. Então, para a entrada $x_1(k)$, tem-se

$$y_1(k) = kx_1(k)$$

Seja $x_2(k) = x_1(k-\tau)$, então

$$y_2(k) = kx_2(k) = kx_1(k-\tau)$$

No entanto,

$$y_1(k-\tau) = (k-\tau)x_1(k-\tau) \neq y_2(k)$$

Portanto, esse sistema não é invariante no tempo (é um sistema variante no tempo).

4.5 Exercícios

Exercício 4.5.1 Defina a convolução entre os sinais $y(k)$ e $x(k)$ por

$$y(k) * x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(k-n)x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x(k-n) = x(k) * y(k)$$

Prove as seguintes relações:

1. $x(k) * y(k) = y(k) * x(k)$
2. $x(k) * (y(k) + f(k)) = x(k) * y(k) + x(k) * f(k)$
3. $x(k) * \delta(k) = \delta(k) * x(k) = x(k)$
4. $x(k) * \delta(k-\tau) = x(k-\tau)$

Exercício 4.5.2 Calcule a convolução entre os sinais $x(k)$ e $y(k)$ dados por

$$x(k) = \delta(k+2) - 1.5\delta(k-1) + u(k-2)$$

$$y(k) = \delta(k+2) - \delta(k-1)$$

Exercício 4.5.3 Considere $a \in \mathbb{C}$. Prove a seguinte expressão:

$$\sum_{n=0}^{k-1} a^n = 1 + a + \dots + a^{k-1} = \frac{1 - a^k}{1 - a}$$

Portanto, prove que se $|a| < 1$, tem-se no limite

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1 - a}$$

Exercício 4.5.4 Calcule a expressão abaixo:

$$f_{\tau} = \sum_{n=\tau}^{\infty} a^n, \quad |a| < 1, \quad a \in \mathbb{C}$$

Exercício 4.5.5 Considere $a \in \mathbb{C}$. Prove a seguintes expressão:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a^n = \frac{a}{(1 - a)^2}, \quad |a| < 1$$

Exercício 4.5.6 Considere um sistema S cuja entrada $x(k)$ e a saída $y(k)$ estão relacionados por

1. $y(k) = x(k) + 5 \cos(x(k))$
2. $y(k) = k + x(k - k^2)\mu(k)$
3. $y(k) = kx(k) + 5x(k - 1)$
4. $y(k) = 3x(k + 1)$

Determine se o sistema S é ou não é: (i) linear; (ii) invariante no tempo; (iii) causal.

Exercício 4.5.7 Considere a sequência de Fibonacci $\{y_k\}$ definida pela equação de diferenças

$$y(k + 2) = y(k + 1) + y(k), \quad y(0) = 2, \quad y(1) = 1$$

Mostre que

$$y(k) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k \mu(k) + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \mu(k)$$

Exercício 4.5.8 Determine a resposta ao impulso do sistema

$$y(k + 1) = ay(k) + x(k), \quad k \geq 0$$

Exercício 4.5.9 Determine as condições sobre os coeficientes a_1 e a_2 para que todas as soluções de

$$y(k + 2) + a_1 y(k + 1) + a_2 y(k) = x(k), \quad y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1$$

com $x(k)$ uma entrada limitada qualquer converjam para zero com $k \rightarrow \infty$.

Exercício 4.5.10 Para a equação de diferenças de primeira ordem

$$y(k + 1) + 0.5y(k) = x(k), \quad k \geq 0$$

com condições iniciais $y(0) = y_0$, determine:

1. Sua resposta ao impulso $h(k)$

2. A saída $y(k)$ para a entrada $x(k) = 1 + 3k^3$, com $k \geq 0$
3. A saída $y(k)$ para a entrada $x(k) = \cos(k\pi/2) + \sin(2k)$, com $k \geq 0$
4. A saída $y(k)$ para a entrada $x(k) = (-0.5)^k \mu(k)$

Exercício 4.5.11 Determine a solução homogênea e, em seguida, a solução completa das seguintes equações de diferenças:

1. $y(k+1) - y(k) = k$, $y(0) = 1/2$.
2. $y(k) - 3y(k-1) + y(k-2) = 2(1/2)^k - 5(1/2)^{k-1}$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.
3. $y(k) + 2y(k-1) + 10y(k-2) = 3k^2 + 2k^3$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0$.
4. $y(k+2) - 2y(k+1) + y(k) = 5\sin(k) + 3k^2$, $y(0) = y(1) = 1/4$.

Capítulo 5

Transformada \mathcal{Z}

A transformada \mathcal{Z} é uma ferramenta extremamente útil para a análise de sistemas a tempo discreto e processamento digital de sinais. Essa transformada atua de forma análoga à transformada de Laplace para sistemas contínuos no tempo. Este capítulo apresenta os conceitos e propriedades fundamentais da transformada \mathcal{Z} , incluindo a transformação de funções básicas, propriedades relevantes como linearidade e o teorema da convolução, além da transformada inversa. Também são discutidas aplicações importantes, tais como a resolução de equações de diferenças e a análise da resposta de um sistema a diversos tipos de entrada. Ademais, o conceito chave de função de transferência é introduzido no âmbito da transformada \mathcal{Z} .

A transformada unilateral \mathcal{Z} de um sinal discreto $f(k)$ é definida pela seguinte fórmula:

$$F(z) := \mathcal{Z}[f(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

É importante ressaltar que essa transformada é específica para sinais discretos. Neste texto, adota-se, com certo abuso de notação, a expressão $\mathcal{Z}[f(t)]$ para representar a transformada \mathcal{Z} do sinal discretizado $f(k) := f(kT) = f(t)|_{t=kT}$, em que T é o período de amostragem.

A aplicação da transformada \mathcal{Z} em alguns sinais comuns é apresentada a seguir.

5.1 Transformada de funções básicas

1. Impulso unitário

$$f(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1 & , \text{se } k = 0 \\ 0 & , \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

Portanto, sua transformada \mathcal{Z} é dada por

$$F(z) = \mathcal{Z}[\delta(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^0 z^{-k} = 1$$

2. Degrau unitário

$$f(k) = \mu(k) = \begin{cases} 1 & , \text{se } k \geq 0 \\ 0 & , \text{se } k < 0 \end{cases}$$

Portanto, sua transformada \mathcal{Z} é dada por

$$F(z) = \mathcal{Z}[\mu(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Note (ver Exercício 4.5.3) que essa série converge para $|z| > 1$ (região de convergência).

3. Função polinomial

$$f(k) = \begin{cases} a^k & , \text{ se } k \geq 0 \\ 0 & , \text{ se } k < 0 \end{cases}$$

Portanto, sua transformada \mathcal{Z} é dada por

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)] = \mathcal{Z}[a^k \mu(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{-1}z)^{-k}$$

Fazendo a mudança de variável $\bar{z} = a^{-1}z$, obtém-se

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{-1}z)^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{z}^{-k} = \frac{1}{1 - \bar{z}^{-1}} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

4. Função exponencial

$$f(kT) = \begin{cases} e^{-akT} & , \text{ se } k \geq 0 \\ 0 & , \text{ se } k < 0 \end{cases}$$

Sua transformada \mathcal{Z} é dada por

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{aT}z)^{-k}$$

Fazendo a mudança de variável $\bar{z} = e^{aT}z$, obtém-se

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{aT}z)^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{z}^{-k} = \frac{1}{1 - \bar{z}^{-1}} = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

5. Função senoidal

$$f(k) = \begin{cases} \sin(\omega kT) & , \text{ se } k \geq 0 \\ 0 & , \text{ se } k < 0 \end{cases}$$

Sua transformada \mathcal{Z} é dada por

$$\begin{aligned} F(z) &= \mathcal{Z}[\sin(\omega kT)] = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{2j} (e^{j\omega kT} - e^{-j\omega kT})\right] = \frac{1}{2j} (\mathcal{Z}[e^{j\omega kT}] - \mathcal{Z}[e^{-j\omega kT}]) \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T}z^{-1}} \right) = \frac{1}{2j} \left(\frac{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z^{-1} + z^{-2}} \right) \\ &= \frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1} \end{aligned}$$

5.2 Propriedades da transformada \mathcal{Z}

1. Multiplicação por uma constante. Seja $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$, então

$$\mathcal{Z}[af(k)] = a\mathcal{Z}[f(k)] = aF(z)$$

2. Linearidade:

$$f(k) = \alpha f_1(k) + \beta f_2(k) \quad \implies \quad F(z) = \alpha F_1(z) + \beta F_2(z)$$

3. Deslocamento em atraso. Seja $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$, então

$$\mathcal{Z}[f(k-n)] = z^{-n}F(z) + z^{-n+1}f(-1) + \dots + z^{-1}f(-n+1) + f(-n)$$

Prova: Usando a definição da transformada \mathcal{Z} , tem-se

$$\mathcal{Z}[f(k-n)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-n)z^{-k} = z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} f(k-n)z^{-(k-n)}$$

Fazendo a substituição de variável $k - n = h$, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[f(k-n)] &= z^{-n} \sum_{h=-n}^{\infty} f(h)z^{-h} = z^{-n} \left(\sum_{h=0}^{\infty} f(h)z^{-h} + \sum_{h=-n}^{-1} f(h)z^{-h} \right) \\ &= z^{-n} \left(F(z) + \sum_{h=-n}^{-1} f(h)z^{-h} \right) = z^{-n}F(z) + z^{-n+1}f(-1) + \dots + f(-n)\end{aligned}$$

Se $f(-1), \dots, f(-n)$ forem todos nulos, então $\mathcal{Z}[f(k-n)] = z^{-n}F(z)$. Assim, para $f(k) = g(k)\mu(k)$, tem-se

$$\mathcal{Z}[g(k-n)\mu(k-n)] = z^{-n}G(z)$$

4. Deslocamento em avanço. Seja $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$, então

$$\mathcal{Z}[f(k+n)] = z^n \left(F(z) - \sum_{h=0}^{n-1} f(h)z^{-h} \right) = z^n F(z) - z^n f(0) - z^{n-1}f(1) - \dots - zf(n-1)$$

Assim:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[f(k+1)] &= zF(z) - zf(0) \\ \mathcal{Z}[f(k+2)] &= z\mathcal{Z}[f(k+1)] - zf(1) = z^2F(z) - z^2f(0) - zf(1) \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots\end{aligned}$$

5. Multiplicação de $f(k)$ por a^k . Seja $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$, então

$$\mathcal{Z} = [a^k f(k)] = F(a^{-1}z)$$

Prova:

$$\mathcal{Z}[a^k f(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k f(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)(a^{-1}z)^{-k} = F(a^{-1}z)$$

6. Convolução. Seja $F_1(z) = \mathcal{Z}[f_1(k)]$ e $F_2(z) = \mathcal{Z}[f_2(k)]$, então

$$\mathcal{Z}[f_1(k) * f_2(k)] = F_1(z)F_2(z)$$

7. Teorema do valor inicial. Seja $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$ e assuma que $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ existe, então

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

Exemplo 5.2.1 Qual o valor de $f(0)$ para

$$F(z) = \frac{(1 - e^{-T})z}{(z-1)(z - e^{-T})} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}}$$

Calculando o limite, tem-se

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 1 - 1 = 0 \quad \implies \quad f(0) = 0$$

Note que $f(k) = \mu(k) - e^{-kT}\mu(k)$.

8. Teorema do valor final:

(a) Seja $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$, em que $f(k) = 0, k < 0$, e assuma que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k)$ existe;

(b) Suponha que os polos de $F(z)$ estejam dentro do círculo unitário, com a possível exceção de um polo em $|z| = 1$ (essa é a condição para que $\{f(k)\}$ seja finita).

Então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$$

Exemplo 5.2.2 Para o exemplo anterior com $F(z)$ dada por

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)} \frac{(1-e^{-T})}{(z-e^{-T})}$$

tem-se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} z \frac{(1-e^{-T})}{(z-e^{-T})} = 1$$

9. Multiplicação de $f(k)$ por k .

$$\mathcal{Z}[kf(k)] = -z \frac{dF(z)}{dz}$$

Prova: Usando a definição da transformada \mathcal{Z} , tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[kf(k)] &= \sum_{k=0}^{\infty} kf(k)z^{-k} = z \sum_{k=0}^{\infty} kf(k)z^{-k-1} = -z \sum_{k=0}^{\infty} f(k) (-kz^{-k-1}) \\ &= -z \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \frac{d}{dz} z^{-k} = -z \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = -z \frac{dF(z)}{dz} \end{aligned}$$

Exemplo 5.2.3 Usando a propriedade anterior

$$\mathcal{Z}[kf(k)] = -z \frac{dF(z)}{dz}$$

determine a transformada \mathcal{Z} da discretização da rampa unitária dada por

$$g(t) = \begin{cases} t & , \text{ se } t \geq 0 \\ 0 & , \text{ se } t < 0 \end{cases}$$

Primeiramente, é necessário discretizar esse sinal com um tempo de amostragem T segundos, o que fornece $g(k) := g(t)|_{t=kT} = kT\mu(k)$. Portanto, aplicando a transformada \mathcal{Z} obtém-se

$$G(z) = \mathcal{Z}[g(k)] = \mathcal{Z}[kf(k)]$$

com $f(k) = T\mu(k)$. Notando que $\mathcal{Z}[f(k)] = T\mathcal{Z}[\mu(k)] = Tz/(z-1)$, tem-se

$$\frac{dF(z)}{dz} = -\frac{T}{(z-1)^2}$$

Assim, obtém-se finalmente

$$G(z) = \mathcal{Z}[g(k)] = \mathcal{Z}[kf(k)] = \mathcal{Z}[kT\mu(k)] = -z \frac{dF(z)}{dz} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

5.3 A inversa da transformada \mathcal{Z}

Esta seção apresenta a inversa da transformada \mathcal{Z} de um sinal $F(z)$, que produz a correspondente sequência $f(k)$. No entanto, não é possível obter um único $f(t)$ que gere os pontos $f(k)$, como demonstrado na Figura 5.1.

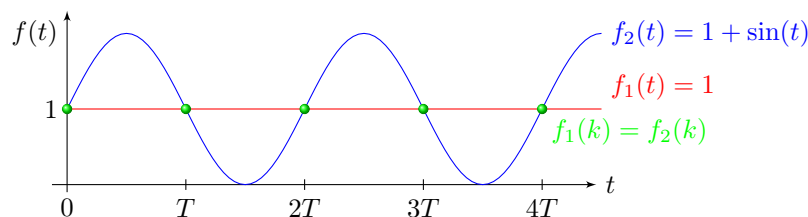


Figura 5.1: Inversa da transformada \mathcal{Z} de um sinal $F(z)$.

As próximas seções apresentam os seguintes métodos para o cálculo da inversa da transformada \mathcal{Z} de uma função $F(z)$ qualquer:

1. Método da expansão em frações parciais
2. Método da divisão direta
3. Métodos computacionais (ver Apêndice A.6)

5.3.1 Método da expansão em frações parciais

A expansão em frações parciais para o caso discreto é análoga ao caso contínuo (como descrita na Seção 3.3). Porém, antes de se apresentar os detalhes dessa decomposição é oportuno esclarecer alguns fatos sobre os polos e zeros de uma função racional $F(z)$. Sabe-se que a função $F(z)$ com $n \geq m$ dada por

$$F(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n}$$

pode ser reescrita de forma equivalente como

$$F(z) = K \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)}$$

em z_i e p_i são respectivamente os zeros e os polos de $F(z)$. Porém, note que também é possível reescrever a função $F(z)$ como

$$F(z) = \frac{b_0 z^{-(n-m)} + b_1 z^{-(n-m+1)} + \cdots + b_m z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

Assim, é preciso fazer atenção no momento de se determinar os polos e zeros de $F(z)$.

Exemplo 5.3.1 Suponha que se deseje saber quais são os polos e zeros de

$$F(z) = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{(1 + z^{-1})(1 + 2z^{-1})}$$

Aparentemente, essa função tem dois polos, em $z_1 = -1$ e $z_2 = -2$, e um zero localizado em $z_1 = -0.5$. No entanto, existe um outro zero em $z = 0$, já que

$$F(z) = \frac{z(z + 0.5)}{(z + 1)(z + 2)}$$

Embora não seja essencial, é preferível em alguns casos efetuar a expansão em frações parciais de $F(z)/z$ em vez de $F(z)$, ou seja

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{(z - p_1)} + \frac{c_2}{(z - p_1)^2} + \cdots + \frac{c_\ell}{(z - p_1)^\ell} + \frac{c_{\ell+1}}{z - p_{\ell+1}} + \cdots + \frac{c_n}{(z - p_n)}$$

em que $z = p_1$ é um polo de multiplicidade ℓ e o restante são polos distintos. Após efetuada a expansão em frações parciais de $F(z)/z$, obtém-se

$$F(z) = c_0 + \frac{c_1 z}{(z - p_1)} + \frac{c_2 z}{(z - p_1)^2} + \cdots + \frac{c_\ell z}{(z - p_1)^\ell} + \frac{c_{\ell+1} z}{z - p_{\ell+1}} + \cdots + \frac{c_n z}{(z - p_n)}$$

cujas transformada inversa é dada por

$$f(k) = c_0 \delta(k) + c_1 p_1^k + c_2 k p_1^{k-1} + \cdots + \frac{c_\ell}{(\ell - 1)!} \prod_{i=0}^{\ell-2} (k - i) p_1^{k-\ell+1} + c_{\ell+1} p_{\ell+1}^k + \cdots + c_n p_n^k, \quad k \geq 0$$

Portanto, $F(z)$ é dada por $F(z) = 10z^{-1} + 17z^{-2} + 18.4z^{-3} + \dots$

3. Comparando $F(z)$ acima com a definição da transformada \mathcal{Z} , tem-se $f(0) = 0$, $f(1) = 10$, $f(2) = 17, \dots$

Exemplo 5.3.5 Para $F(z) = 1 - 3z^{-2}$, obtém-se diretamente os termos: $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = -3$ e $f(k) = 0$ para $k \geq 3$, ou seja:

$$f(k) = \delta(k) - 3\delta(k-2)$$

5.4 Resolução de equações de diferenças usando a transformada \mathcal{Z}

Considere a equação de diferenças

$$y(k+n) + a_1y(k+n-1) + \dots + a_ny(k) = b_0x(k+m) + b_1x(k+m-1) + \dots + b_mx(k)$$

com $k \geq 0$, $n \geq m$, e condições iniciais dadas por

$$y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1, \quad \dots \quad y(n-1) = y_{n-1}$$

Defina $Y(z) = \mathcal{Z}[y(k)]$. Então, $y(k+n)$ e $y(k-n)$ podem ser reescritos em termos de $Y(z)$ e das condições iniciais, lembrando¹ que

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[y(k+n)] &= z^n Y(z) - z^n y(0) - z^{n-1} y(1) - \dots - zy(n-1) \\ \mathcal{Z}[y(k-n)] &= z^{-n} Y(z) + z^{-n+1} y(-1) + \dots + y(-n) \end{aligned}$$

Em geral, $y(k) = 0$ para $k < 0$, assim $\mathcal{Z}[y(k-n)] = z^{-n} F(z)$.

Exemplo 5.4.1 Seja a equação de diferenças de primeira ordem homogênea

$$y(k+1) - y(k) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad k \geq 0$$

Aplicando a transformada \mathcal{Z} , tem-se

$$zY(z) - zy(0) - Y(z) = 0 \quad \implies \quad Y(z) = y_0 \frac{z}{z-1}$$

cuja transformada inversa é

$$y(k) = y_0 \mu(k)$$

Exemplo 5.4.2 Seja a equação de diferenças de primeira ordem não homogênea

$$y(k+1) = ay(k) + x(k), \quad k \geq 0$$

em que a entrada $x(k)$ é o impulso unitário $\delta(k)$ e a condição inicial $y(0)$ é nula. Aplicando a transformada \mathcal{Z} , tem-se

$$zY(z) - zy(0) - aY(z) = 1 \quad \implies \quad Y(z) = \frac{1}{z-a} = z^{-1} \frac{z}{z-a}$$

Lembrando das seguintes propriedades:

1. o termo $z/(z-a)$ é a transformada \mathcal{Z} da função $f(k) = a^k \mu(k)$;
2. a transformada inversa de $z^{-1} F(z)$ é dada por $z^{-1} F(z) = \mathcal{Z}[f(k-1) \mu(k-1)]$;

conclui-se que a solução $y(k)$ é dada por

$$y(k) = a^{k-1} \mu(k-1)$$

¹Ver seção 5.2.

Exemplo 5.4.3 Considere o sistema

$$y(k+1) + 2y(k) = 4^k, \quad y(0) = y_0, \quad k \geq 0$$

Aplicando a transformada \mathcal{Z} , tem-se

$$zY(z) - zy(0) + 2Y(z) = \frac{z}{z-4}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z}{(z+2)(z-4)} + y_0 \frac{z}{z+2} = \frac{1}{3} \frac{1}{z+2} + \frac{2}{3} \frac{1}{z-4} + y_0 \frac{z}{z+2} \\ &= \frac{1}{3} \frac{z^{-1}z}{z+2} + \frac{2}{3} \frac{z^{-1}z}{z-4} + y_0 \frac{z}{z+2} \end{aligned}$$

cujas transformadas inversas são

$$y(k) = \frac{1}{3}(-2)^{k-1}\mu(k-1) + \frac{2}{3}4^{k-1}\mu(k-1) + y_0(-2)^k\mu(k)$$

Para se obter a equação acima, as seguintes propriedades foram utilizadas:

$$\mathcal{Z}[f(k-1)\mu(k-1)] = z^{-1}F(z) \quad e \quad \mathcal{Z}[a^k\mu(k)] = \frac{z}{z-a}$$

Exemplo 5.4.4 Seja a equação de diferenças de segunda ordem homogênea

$$y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 0, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 1, \quad k \geq 0$$

Aplicando a transformada \mathcal{Z} , tem-se

$$z^2Y(z) - z^2y_0 - zy_1 + 3(zY(z) - zy_0) + 2Y(z) = 0$$

Assim

$$Y(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2}$$

cujas transformadas inversas são

$$y(k) = (-1)^k\mu(k) - (-2)^k\mu(k)$$

Note que $Y(z)$ pode ainda ser decomposto como

$$Y(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{2}{z+2} - \frac{1}{z+1}$$

cujas transformadas inversas são

$$y(k) = 2(-2)^{k-1}\mu(k-1) - (-1)^{k-1}\mu(k-1)$$

Exemplo 5.4.5 Considere a seguinte equação de diferenças de segunda ordem:

$$y(k+2) + y(k) = 0, \quad k \geq 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$$

Aplicando a transformada \mathcal{Z} , obtém-se

$$z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) + Y(z) = 0 \quad \implies \quad Y(z) = \frac{z^2}{z^2+1}$$

Decompondo a expressão acima, mais precisamente $Y(z)/z$, em frações parciais, obtém-se

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z+j} + \frac{z}{z-j} \right)$$

cujas transformadas inversas fornecem

$$y(k) = \frac{1}{2} ((-j)^k + (j)^k) = \cos(k\pi/2)\mu(k)$$

ou seja

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = -1, \quad y(3) = 0, \quad y(n+4) = y(n)$$

Exemplo 5.4.6 Seja a equação de diferenças de segunda ordem dada por

$$y(k) - y(k-2) = 0, \quad k \geq 0, \quad y(-2) = a, \quad y(-1) = b$$

Por recursão, obtém-se a sequência infinita

$$\begin{aligned} y(0) &= y(-2) = a \\ y(1) &= y(-1) = b \\ y(2) &= y(0) = a \\ y(3) &= y(1) = b \\ &\vdots \end{aligned}$$

Da sequência acima, percebe-se que a solução é dada por

$$y(k) = \frac{a}{2} (1 + (-1)^k) \mu(k) + \frac{b}{2} (1 + (-1)^{k-1}) \mu(k-1)$$

É possível obter a solução sem usar a recursão. Aplicando a transformada \mathcal{Z} na equação de diferenças acima e notando que

$$\mathcal{Z}[y(k-2)] = z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)$$

obtém-se

$$Y(z) - z^{-2}Y(z) - z^{-1}b - a = 0 \quad \implies \quad Y(z) = a \frac{z^2}{z^2 - 1} + b \frac{z}{z^2 - 1}$$

A realizando a seguinte decomposição² de $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{a}{2} \left[\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+1} \right] + \frac{b}{2} \left[\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} \right]$$

a transformada inversa fornece

$$y(k) = \frac{a}{2} (1 + (-1)^k) \mu(k) + \frac{b}{2} (1 + (-1)^{k-1}) \mu(k-1)$$

Observação 5.4.1 Para calcular $\mathcal{Z}[y(k-2)]$, nesse exemplo, é preciso considerar que o sinal $y(k)$ existe para $k < 0$. Assim, $\mathcal{Z}[y(k-2)]$ é dada pela Propriedade 3 da transformada \mathcal{Z} , ou seja

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[y(k-2)] &= \sum_{k=0}^{\infty} y(k-2)z^{-k} = z^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} y(k-2)z^{-(k-2)} = z^{-2} \sum_{h=-2}^{\infty} y(h)z^{-h} \\ &= y(-2) + y(-1)z^{-1} + \sum_{h=-2}^{\infty} y(h)z^{-h} = y(-2) + z^{-1}y(-1) + z^{-2}Y(z) \end{aligned}$$

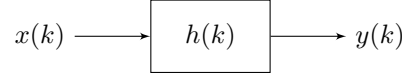
5.5 Resposta a uma excitação qualquer

Esta seção demonstra que a resposta de um sistema LTI (linear e invariante no tempo discreto) a qualquer sequência de entrada arbitrária $x(k)$ pode ser obtida, de forma análoga ao caso contínuo, através da convolução de $x(k)$ com a resposta ao impulso $h(k)$ do sistema. O princípio fundamental permanece: a resposta ao impulso encapsula todas as informações necessárias para determinar a saída do sistema diante de qualquer entrada, utilizando a operação de convolução.

5.5.1 Solução forçada

Considere o sistema linear, invariante no tempo, representado na figura abaixo, em que a entrada é $x(k)$, a saída é $y(k)$, e a resposta ao impulso é $h(k)$.

²Observe que essa decomposição não é a expansão em frações parciais padrão, que segue os passos descritos na Seção 3.3. Outras decomposições equivalentes são apresentadas no Exercício 5.9.8.



A resposta forçada desse sistema, que descreve a relação entrada-saída ignorando as condições iniciais, é dada pela seguinte *convolução*:

$$y(k) = h(k) * x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(k-n)x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)x(k-n)$$

Se o sistema for causal, então $h(k-n) = 0$ para $n > k$, e a somatória se reduz a

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^k h(k-n)x(n)$$

No mais, se a entrada for nula para $k < 0$, ou seja $x(k) = 0$ para $k < 0$, então a solução forçada será

$$y(k) = \sum_{n=0}^k h(k-n)x(n) = \sum_{n=0}^k h(n)x(k-n)$$

Exemplo 5.5.1 Considere o sistema descrito pela seguinte equação de diferenças:

$$y(k+1) = ay(k) + x(k)$$

em que $x(k)$ é o degrau de amplitude b dado por

$$x(k) = b\mu(k) = \begin{cases} b & , \text{ se } k \geq 0 \\ 0 & , \text{ se } k < 0 \end{cases}$$

Sabe-se do Exemplo 5.4.2 que a resposta ao impulso desse sistema é

$$h(k) = a^{k-1}\mu(k-1)$$

Assim, tem-se pela convolução que a solução forçada $y_f(k)$ é dada por

$$y_f(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)x(k-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a^{n-1}\mu(n-1)] [b\mu(k-n)] = b \sum_{n=1}^k a^{n-1}$$

Note, porém, que para $a = 1$, a solução se reduz a

$$y_f(k) = kb$$

Por outro lado, para $a \neq 1$, a solução pode ser simplificada percebendo-se que

$$\sum_{n=1}^k a^{n-1} = \sum_{n=0}^{k-1} a^n = \frac{1-a^k}{1-a}$$

Portanto, a solução forçada $y_f(k)$ pode ser descrita pela expressão

$$(5.1) \quad y_f(k) = \begin{cases} kb & , \text{ se } a = 1 \\ b \frac{1-a^k}{1-a} & , \text{ se } a \neq 1 \end{cases}$$

que corresponde à solução obtida na Secção 4.3.2, com condição inicial nula.

5.5.2 Solução completa

Como no caso contínuo, a convolução fornece apenas a resposta forçada para uma excitação qualquer. Para se obter a solução completa é preciso levar em consideração as condições iniciais.

Exemplo 5.5.2 Suponha que o sistema do Exemplo 5.5.1 esteja sujeito à condição inicial $y(0) = y_0$. Assim, somando-se a solução homogênea, que é dada por $y_h(k) = y_0 a^k$, e a solução forçada (5.1), a resposta completa fica sendo

$$y(k) = \begin{cases} y_0 + bk & , \text{ se } a = 1 \\ y_0 a^k + b \frac{1 - a^k}{1 - a} & , \text{ se } a \neq 1 \end{cases}$$

que é exatamente a expressão (4.4), determinada na Seção 4.3.2.

5.6 Função de transferência

De forma análoga ao caso contínuo, a função de transferência é também uma ferramenta fundamental para a análise de sistemas lineares e invariantes no tempo discreto. Ela encapsula a relação entrada-saída de um sistema LTI discreto no domínio da frequência, relacionando $Y(z)$, a transformada \mathcal{Z} do sinal de saída com $X(z)$, a transformada \mathcal{Z} do sinal de entrada. Equivale à transformada \mathcal{Z} da resposta ao impulso do sistema discreto. A função de transferência discreta pode ser determinada diretamente aplicando-se a transformada \mathcal{Z} na equação de diferenças do sistema. Assim como no caso contínuo, o estudo de seus polos e zeros fornece informações críticas sobre propriedades do sistema, em especial sobre a estabilidade.

Aplicando a transformada \mathcal{Z} na convolução discreta

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(k-n)x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)x(k-n)$$

obtem-se

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

Essa relação está expressa na Figura 5.2 abaixo.

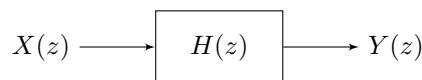


Figura 5.2: Relação entrada-saída no domínio da frequência.

A função $H(z) = Y(z)/X(z)$, que relaciona a transformada \mathcal{Z} do sinal de saída $y(k)$ com a transformada \mathcal{Z} do sinal de entrada $x(k)$, é denominada de função transferência. Perceba que para uma entrada impulsiva $X(z) = 1$, a saída é $Y(z) = H(z)$. Portanto, $H(z)$ é a transformada \mathcal{Z} da resposta ao impulso $h(k)$, ou seja,

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}$$

A função de transferência também pode ser obtida da equação de diferenças, considerando as condições iniciais nulas. Assim, aplicando a transformada \mathcal{Z} em ambos os lados da equação de diferenças

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \cdots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) = b_0 x(k+m) + b_1 x(k+m-1) + \cdots + b_{m-1} x(k+1) + b_m x(k)$$

obtem-se

$$[z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n] Y(z) = [b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m] X(z)$$

Portanto,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n}$$

Para que o sistema seja realizável, não antecipativo, é preciso que $n \geq m$.

Observação 5.6.1 A observação (3.6.1), para o caso contínuo, se aplica de forma análoga ao caso discreto.

Observação 5.6.2 No caso discreto, o ganho estático é dado por $H(1) = \sum_0^m b_i / (1 + \sum_1^n a_i)$. Assim, se a entrada for $x(k) = X_0 \mu(k)$, um degrau de amplitude X_0 , e o sistema for assintoticamente estável, a saída atingirá o regime estacionário $y_\infty = H(1)X_0$.

Exemplo 5.6.1 Considere o mesmo sistema do Exemplo 5.5.1, dado por

$$y(k+1) = ay(k) + x(k)$$

em que a entrada é $x(k) = b\mu(k)$. Para esse sistema, a transformada \mathcal{Z} da resposta ao impulso $h(k)$ e da entrada $x(k)$ são respectivamente dadas por

$$H(z) = \frac{1}{z-a} \quad e \quad X(z) = \frac{bz}{z-1}$$

Assim, a saída é dada por

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{bz}{(z-a)(z-1)}$$

Note que para o caso em que $a = 1$, a saída $Y(z)$ passa a ser

$$Y(z) = b \frac{z}{(z-1)^2}$$

cuja inversa da transformada \mathcal{Z} , de acordo com o Exemplo 5.2.3, fornece a solução forçada

$$y_f(k) = kb\mu(k)$$

Por outro lado, para o caso em que $a \neq 1$, a saída $Y(z)$ possui a seguinte decomposição em frações parciais:

$$Y(z) = \frac{bz}{(z-a)(z-1)} = \frac{bz^{-1}}{a-1} \left(a \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-1} \right)$$

cuja inversa da transformada \mathcal{Z} fornece a solução forçada

$$y_f(k) = \frac{b}{a-1} (aa^{k-1}\mu(k-1) - \mu(k-1)) = b \frac{1-a^k}{1-a} \mu(k-1)$$

Combinando esses dois casos, tem-se exatamente a solução obtida em (5.1).

5.7 Conceitos de estabilidade

Esta seção apresenta alguns conceitos básicos de estabilidade de sistema lineares discretos invariantes no tempo. Primeiro, é realizada uma análise do comportamento da solução homogênea. Em seguida, é demonstrado que um sistema será estável se os polos de sua função de transferência estiverem localizados no interior do círculo unitário. Finalmente, a noção de estabilidade BIBO é introduzida.

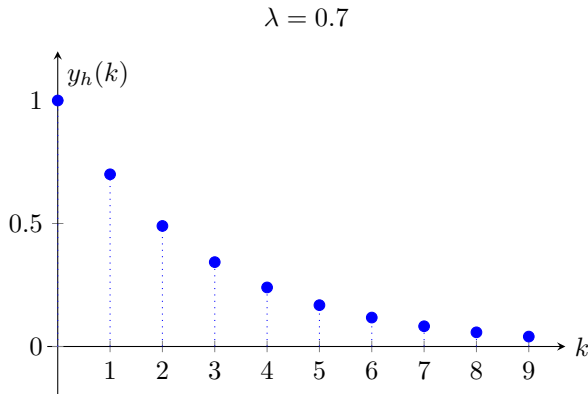
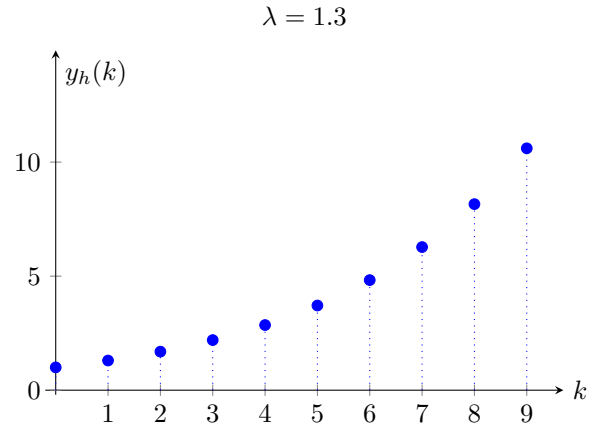
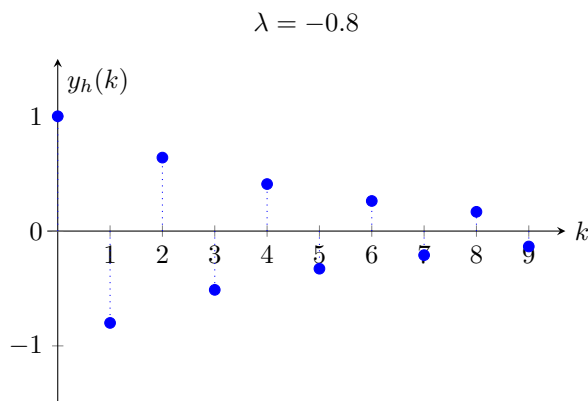
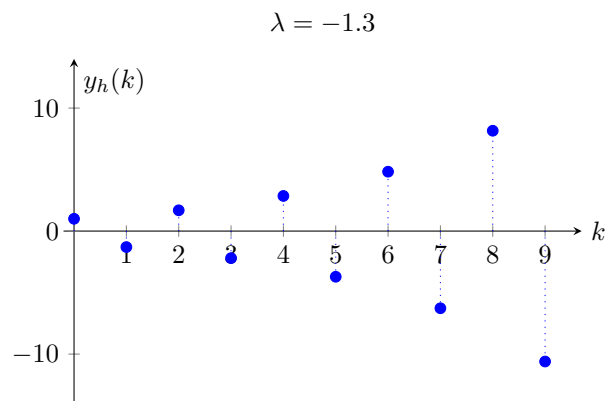
5.7.1 Estabilidade da solução homogênea

Foi visto que a solução geral da equação de diferenças homogênea de primeira ordem tem a forma

$$y_h(k) = C\lambda^k$$

Portanto, a convergência dessa sequência depende essencialmente do valor da raiz λ .

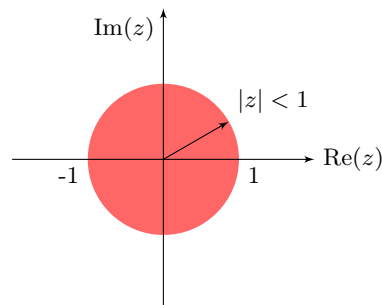
As Figuras 5.4, 5.3, 5.5 e 5.6 apresentam o comportamento da solução homogênea $y_h(k)$ para valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ dentro dos seguintes quatro intervalos: $0 < \lambda < 1$; $\lambda > 1$; $-1 < \lambda < 0$ e $\lambda < -1$. Em todos os quatro casos, foi considerado $C = 1$.

Figura 5.3: Caso $0 < \lambda < 1$.Figura 5.4: Caso $\lambda > 1$.Figura 5.5: Caso $-1 < \lambda < 0$.Figura 5.6: Caso $\lambda < -1$.

Note-se que para o caso complexo em que $\lambda = \sigma + j\omega$, tem-se

$$y_h(k) = C\lambda^k = C|\lambda|^k e^{jk\theta}$$

Assim, nesse caso, $y_h(k)$ também convergirá a zero se $|\lambda| < 1$. Portanto, a região de estabilidade é o disco unitário aberto, o interior do círculo unitário dado por $|\lambda| < 1$, como apresentado na Figura 5.7.

Figura 5.7: Região de estabilidade no plano complexo z .

Observação 5.7.1 Embora essa análise tenha sido baseada numa única raiz, sabe-se que a solução homogênea é uma combinação linear de termos contendo raízes distintas e raízes múltiplas. As raízes distintas foram tratadas

acima. Se houver uma raiz de multiplicidade ℓ , haverá termos da forma $k^{\ell-1}\lambda^k$. Fato esse que não altera a análise, já que o termo $k^{\ell-1}\lambda^k$ convergirá a zero se $|\lambda| < 1$.

5.7.2 Estabilidade a partir da função de transferência

Considere a seguinte função de transferência:

$$H(z) = K \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)}$$

em que $n > m$, $p_1 = p_2 = \cdots = p_\ell$ é um polo de multiplicidade ℓ , e os polos restantes são todos distintos. Decompondo $H(z)$ em frações parciais, tem-se

$$H(z) = c_0 + \frac{c_1 z}{z - p_1} + \frac{c_2 z}{(z - p_1)^2} + \cdots + \frac{c_\ell z}{(z - p_1)^\ell} + \frac{c_{\ell+1} z}{z - p_{\ell+1}} + \cdots + \frac{c_n z}{z - p_n}$$

Aplicando a inversa da transformada \mathcal{Z} e utilizando o resultado do Exercício 5.9.4, obtém-se

$$h(k) = c_0 \delta(k) + c_1 p_1^k + c_2 k p_1^{k-1} + \cdots + \frac{c_\ell}{(\ell-1)!} \prod_{i=0}^{\ell-2} (k-i) p_1^{k-\ell+1} + c_{\ell+1} p_{\ell+1}^k + \cdots + c_n p_n^k, \quad t \geq 0$$

Portanto, para que $h(k)$ convirja para zero com $k \rightarrow \infty$, é necessário que

$$|p_i| < 1$$

Assim, conclui-se que todos os polos de $H(z)$ devem pertencer ao interior do círculo unitário, como apresentado na Figura 5.8.

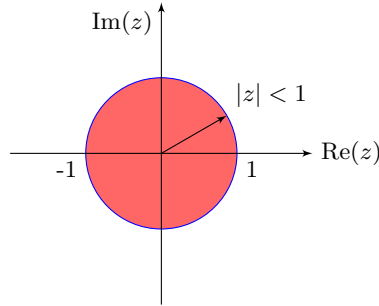


Figura 5.8: Região de estabilidade no plano complexo z .

5.7.3 Estabilidade BIBO

Um sistema é dito BIBO (Bounded Input Bounded Output) estável se toda entrada limitada produzir uma saída limitada. Uma sequência $x(k)$ é limitada se existir um número finito M tal que $|x(k)| < M$ para todo k .

Lema 5.7.1 *Um sistema discreto linear invariante no tempo é BIBO estável se, e somente se,*

$$\|h(k)\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

ou seja, se e somente se, sua resposta ao impulso $h(k)$ for absolutamente somável.

Prova. Para provar a condição de suficiência, considere que

$$|x(k)| < M, \quad \forall k$$

Então

$$|y(k)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)x(k-n) \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)||x(k-n)|$$

Como $|x(k)| < M$ para todo k , tem-se

$$|y(k)| \leq M \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|, \quad \forall n$$

Portanto, se $\|h(k)\|_1 < \infty$, o sistema é BIBO estável.

Para provar a condição necessária, é preciso encontrar uma entrada limitada tal que a saída não seja limitada se $h(k)$ não for absolutamente somável.

Considere a entrada dada por

$$x(k) = \begin{cases} \frac{h(-k)}{|h(-k)|} & , \text{ se } h(-k) \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } h(-k) = 0 \end{cases}$$

Então $x(k)$ é limitada por $M = 1$. Como a saída é

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)x(k-n)$$

para $k = 0$, tem-se

$$y(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)x(-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{h(n)^2}{|h(n)|} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|$$

Portanto, para que $y(0)$ seja limitada, é necessário que $h(k)$ seja absolutamente somável. ■

Exemplo 5.7.1 Considere a função de transferência dada por

$$H(z) = \frac{1}{z+1}$$

cuja resposta ao impulso é dada por

$$h(k) = (-1)^{k-1} \mu(k-1)$$

Claramente, essa resposta ao impulso não satisfaz Lema 5.7.1, ou seja, $\|h(k)\|_1$ não é finito. Portanto, o sistema não é BIBO estável e, conseqüentemente, existe uma entrada $x(k)$ limitada tal que a saída $y(k)$ seja ilimitada. Para ver esse fato, seja $x(k) = (-1)^k \mu(k)$. Então, a saída é dada por

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)x(k-n) = \sum_{n=1}^k (-1)^{n-1} (-1)^{k-n} = k(-1)^{k-1} \mu(k)$$

que fornece a sequência de pontos

$$\{0, 1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, 9, -10, \dots\}$$

5.8 Equivalente discreto da função de transferência contínua

É possível determinar um equivalente discreto $H(z)$, uma função de transferência discreta, para uma função de transferência contínua $H(s)$. Dois métodos para se determinar o equivalente discreto serão apresentados: o método do impulso invariante e o método do segurador de ordem zero.

5.8.1 Método do impulso invariante

O equivalente discreto usando o método do impulso invariante é obtido de forma bastante simples através dos seguintes passos:

1. calcula-se a inversa da transformada de Laplace da função de transferência $H(s)$;

2. discretiza-se a resposta ao impulso $h(t)$;
3. determina-se $H(z)$ calculando a transformada \mathcal{Z} de $h(k) = Th(t)\big|_{t=kT}$.

Exemplo 5.8.1 Considere a função de transferência

$$H(s) = \frac{a}{s(s+a)}$$

Perceba que $H(s)$ tem a seguinte expansão em frações parciais:

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}$$

Aplicando a inversa da transformada de Laplace, tem-se

$$h(t) = 1 - e^{-at}, \quad t \geq 0$$

Aplicando agora a transformada \mathcal{Z} no sinal $Th(kT)$, tem-se

$$H(z) = \mathcal{Z} [T(1 - e^{-akT})] = \frac{T}{1 - z^{-1}} - \frac{T}{1 - e^{-aT}z^{-1}} = \frac{zT(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})}$$

Observação 5.8.1 Uma demonstração não formal no domínio do tempo para motivar a relação $h_d(k) = Th_c(kT)$, em que $h_c(t)$ é a resposta ao impulso contínua e $h_d(k)$ é a resposta ao impulso discreta usada no método do impulso invariante é a seguir apresentada.

Perceba que uma aproximação para a integral de convolução pode ser dada por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_c(\tau)u(t-\tau)d\tau \approx \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_c(iT)x(t-iT)T$$

em que T pode ser feito suficientemente pequeno. Essa aproximação tem a propriedade que à medida que $T \rightarrow 0$, o erro de aproximação tende a zero. Assim, uma aproximação discreta dessa resposta, num instante de tempo $t = kT$, é dada por

$$\begin{aligned} y(kT) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_c(iT)x(kT-iT)T = \sum_{i=-\infty}^{\infty} Th_c(iT)x((k-i)T) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_d(i)x(k-i), \quad h_d(k) = Th_c(kT) \end{aligned}$$

A diferença de amplitude T entre $h_c(t)$ e $h_d(k)$ pode também ser visualizada do fato que a transformação do impulso unitário discreto para o tempo contínuo, através de um segurador de ordem zero, gera um pulso de área T . Por outro lado, o impulso contínuo tem área unitária.

5.8.2 Método do segurador de ordem zero

O método de discretização através do segurador de ordem zero (SOZ), que é um dispositivo frequentemente utilizado em conversores digitais-analógicos, está apresentado na Figura 5.9 abaixo.

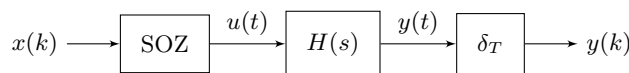


Figura 5.9: Equivalente discreto através do SOZ.

Para obter o equivalente discreto usando esse método, é preciso determinar a função de transferência discreta $H(z)$, entre a entrada amostrada $x(k)$ e a saída $y(k)$ do sistema da Figura 5.9, em que $H(s)$ representa a planta contínua a ser discretizada e $SOZ(s)$ é a função de transferência do segurador de ordem zero. O Exemplo 5.8.2 abaixo descreve o comportamento ideal e os passos necessários para se obter a função de transferência do segurador de ordem zero.

Exemplo 5.8.2 O SOZ executa basicamente duas operações: coletar as amostras (“sample”) e mantê-las constantes (“hold”) durante o período de amostragem. A amostra $x(kT)$ recebida em $t = kT$ é mantida constante até o próximo instante $t = (k + 1)T$. Um exemplo dessa operação é apresentado na Figura 5.10, em que $x_s(t)$ é a saída do segurador de ordem zero para uma entrada senoidal amostrada a cada instante T de tempo.

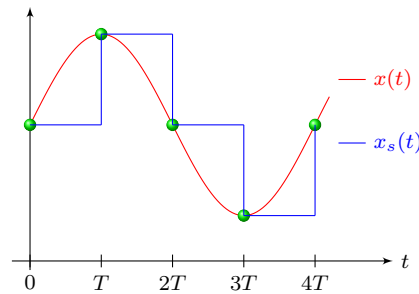


Figura 5.10: Saída $x_s(t)$ do SOZ para uma entrada senoidal $x(t)$.

Uma idealização matemática desse processo está apresentada na Figura 5.11, em que o sinal $x(t)$ é primeiramente amostrado, usando-se um amostrador ideal δ_T , de período T , e em seguida é mantido constante pelo segurador de ordem zero, fornecendo o sinal $x_s(t)$.

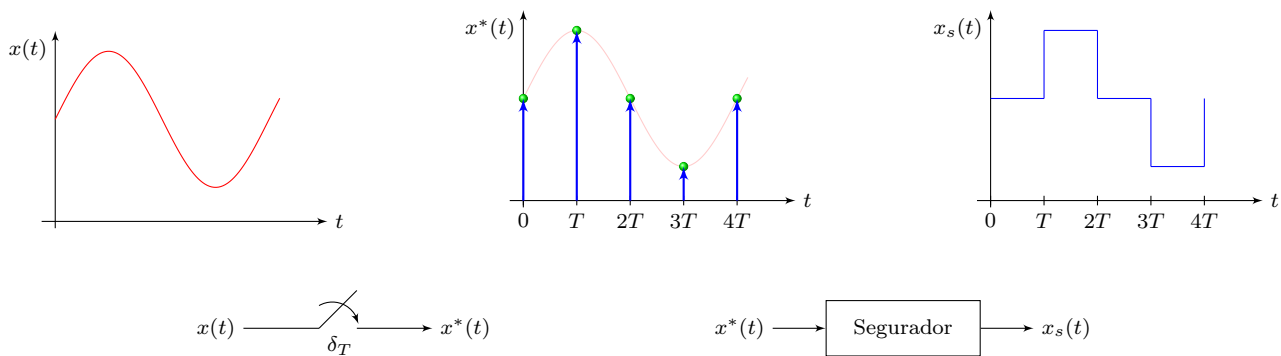


Figura 5.11: Representação ideal do segurador de ordem zero: modulador δ_T e segurador.

O modulador ideal δ_T pode ser matematicamente representado por um trem de impulsos:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

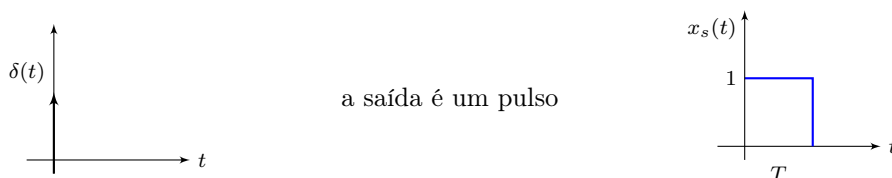
em que $\delta(t)$ é o impulso unitário. Assim, o sinal amostrado $x^*(t)$, que representa um trem de impulsos modulado por $x(t)$, é dado por

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$

Pela característica do segurador, o sinal $x_s(t)$ é dado por

$$x_s(t) = x(kT), \quad kT \leq t < (k + 1)T$$

Assim, percebe-se que para uma entrada impulso unitário



Portanto, a resposta ao impulso unitário do SOZ é

$$h_{SOZ}(t) = \mu(t) - \mu(t - T)$$

e a respectiva função de transferência SOZ será

$$SOZ(s) = \mathcal{L}[h_{SOZ}(t)] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

Usando o resultado do Exemplo 5.8.2 acima, a função de transferência entre a saída $y(t)$ da planta $H(s)$ e a entrada impulsiva no SOZ será

$$Y(s) = \frac{(1 - e^{-Ts})}{s} H(s)$$

A função de transferência desejada $H(z)$, que relaciona a saída $y(k)$ com a entrada $x(k)$, nada mais é que

$$H(z) = \mathcal{Z}[y(kT)] = \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]_{t=kT}]$$

Prosseguindo, fazendo-se uso do seguinte abuso de notação $\mathcal{Z}[F(s)] := \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}[F(s)]_{t=kT}]$, tem-se

$$H(z) = \mathcal{Z}[Y(s)] = \mathcal{Z}\left[(1 - e^{-Ts})\frac{H(s)}{s}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right] - \mathcal{Z}\left[e^{-Ts}\frac{H(s)}{s}\right]$$

Como o termo e^{-Ts} representa um puro atraso (um delay) de período T , tem-se

$$\mathcal{Z}[e^{-Ts}H(s)/s] = z^{-1}\mathcal{Z}[H(s)/s]$$

Assim,

$$H(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[H(s)/s]$$

Exemplo 5.8.3 Usando como exemplo a planta contínua $H(s)$ dada por

$$H(s) = \frac{a}{s + a}$$

tem-se

$$\frac{H(s)}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + a}$$

cuja transformada inversa é dada por

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H(s)}{s}\right] = 1 - e^{-at}, \quad t \geq 0$$

Amostrando esse sinal com $t = kT$, tem-se

$$\mu(k) - e^{-akT}\mu(k)$$

Portanto

$$\mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right] = \mathcal{Z}[\mu(k) - e^{-akT}\mu(k)] = \frac{z}{z - 1} - \frac{z}{z - e^{-aT}} = \frac{z}{(z - 1)} \frac{(1 - e^{-aT})}{(z - e^{-aT})}$$

A função de transferência desejada $H(z)$ fica sendo, no caso,

$$H(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right] = \frac{1 - e^{-aT}}{z - e^{-aT}}$$

5.9 Exercícios

Exercício 5.9.1 Defina a transformada \mathcal{Z} por

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

Prove as seguintes propriedades:

1. $\mathcal{Z}[kf(k)] = -z \frac{d}{dz} F(z)$
2. $\mathcal{Z}[f(k) * g(k)] = F(z)G(z)$
3. $\mathcal{Z}[f(k+1)] = zF(z) - zf(0)$
4. $\mathcal{Z}\left[\sum_{n=0}^k f(n)\right] = \frac{1}{1-z^{-1}} F(z)$

Exercício 5.9.2 Prove a propriedade do deslocamento em avanço.

Exercício 5.9.3 Calcule a transformada \mathcal{Z} de $f(k) = ka^k \mu(k)$.

Exercício 5.9.4 Mostre que a transformada \mathcal{Z} de

$$f(k) = \frac{1}{(\ell-1)!} \prod_{i=0}^{\ell-2} (k-i) p^{k-\ell+1}$$

é dada por

$$F(z) = \frac{z}{(z-p)^\ell}$$

Exercício 5.9.5 Calcule a transformada \mathcal{Z} e a região de convergência para os seguintes sinais:

1. $f(k) = \sum_{n=-k}^k c^n \mu(k)$, com $|c| < 1$
2. $f(k) = a^{k+1} \mu(k+1)$
3. $f(k) = \delta(k+a) + \delta(k) + a^k \mu(-k)$
4. $f(k) = \cos(k\omega) \mu(k)$
5. $f(k) = (a^k + b^k) \mu(k-2)$, com $a = 1/2$ e $b = 2$
6. $f(k) = (-1/3)^k \sin(k\pi/4) \mu(k)$

Exercício 5.9.6 Calcule a Transformada \mathcal{Z} do sinal contínuo $f(t)$ abaixo, usando a discretização $t = kT$.

$$f(t) = (1/2)^t \cos(\alpha t) \mu(t)$$

Exercício 5.9.7 Calcule a inversa da transformada \mathcal{Z} da função $F(z)$ do Exemplo 5.3.3 usando a decomposição em frações parciais sem realizar a divisão por z . Em seguida, verifique o resultado calculando os cinco primeiros pontos tanto da função obtida quanto da expressão de $f(k)$ dada no Exemplo 5.3.3. No mais, usando manipulações algébricas, mostre que ambos $f(k)$ se reduzem à mesma fórmula.

Exercício 5.9.8 Considere a função $Y(z)$ do Exemplo 5.4.6, dada por

$$Y(z) = \frac{az^2 + bz}{z^2 - 1} = Y_1(z) + Y_2(z), \quad Y_1(z) = a \frac{z^2}{z^2 - 1}, \quad Y_2(z) = b \frac{z}{z^2 - 1}$$

Determine $y(k)$ para as seguintes decomposições de $Y(z)$:

1. $Y(z) = c_1 + \frac{c_2}{z-1} + \frac{c_3}{z+1}$.
2. $\frac{Y(z)}{z} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z+1}$.
3. $Y(z) = \frac{a}{2} \left[\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+1} \right] + \frac{Y_2(z)}{z}$, com $\frac{Y_2(z)}{z} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z+1}$.

$$4. Y(z) = Y_1(z) + \frac{b}{2} \left[\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} \right], \text{ com } Y_1(z) = c_1 + \frac{c_2}{z-1} + \frac{c_3}{z+1}.$$

$$5. Y(z) = Y_1(z) + \frac{Y_2(z)}{z}, \text{ com } Y_1(z) = c_1 + \frac{c_2}{z-1} + \frac{c_3}{z+1} \text{ e } \frac{Y_2(z)}{z} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z+1}.$$

$$6. Y(z) = \frac{Y_1(z)}{z^2} + \frac{Y_2(z)}{z}.$$

Em seguida, verifique o resultado calculando os cinco primeiros pontos de cada um dos $y(k)$ obtidos acima. No mais, através de manipulações algébricas, mostre que esses $y(k)$ se reduzem à mesma fórmula.

Exercício 5.9.9 Calcule a inversa da transformada \mathcal{Z} das seguintes funções:

$$1. F(z) = \frac{z^4 - 3z^3 - 12z^2 + 20z + 48}{z^4 + z^3 - z^2 - z}$$

$$2. F(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1} + 0.2z^{-2}}{1 - 0.29z^{-1} - 1.2z^{-2}}$$

$$3. F(z) = \frac{z^{-1} - 5z^{-2}}{(1 - 3z^{-1})(1 + 1/5z^{-1})}$$

usando:

1. a decomposição em frações parciais (seguindo os passos da Seção 3.3);
2. o método da divisão direta;
3. a correspondente equação de diferenças;
4. o comando `filter()` do MATLAB.

Em seguida, verifique se as quatro soluções $f(k)$ obtidas acima fornecem a mesma sequência de pontos (use $k = 0, 1, \dots, 4$).

Exercício 5.9.10 Usando a transformada \mathcal{Z} , determine a solução $y(k)$ da seguinte equação de diferenças:

$$y(k) + 2y(k-2) = 0, \quad k \geq 0, \quad y(-2) = a, \quad y(-1) = b$$

Em seguida, calcule a sequência de pontos $y(k)$, para $k = -2, \dots, 3$.

Exercício 5.9.11 Através de uma mudança de variável e de condições iniciais apropriadas, reescreva a equação de diferenças do Exercício 5.9.10 como

$$y(n+2) + 2y(n) = 0$$

de forma que ambos os problemas de valor inicial sejam equivalentes. Assim, compare a solução $y(n)$ com a solução $y(k)$ obtida no Exercício 5.9.10.

Exercício 5.9.12 Use a transformada \mathcal{Z} para resolver a seguinte equação de diferenças de primeira ordem:

$$y(k+1) = ay(k) + x(k), \quad k \geq 0$$

para a entrada $x(k) = a^k + (-a)^k$ e condição inicial $y(0) = y_0$.

Exercício 5.9.13 Use a transformada \mathcal{Z} para calcular a sequência de Fibonacci descrita pela equação de diferenças do Exercício 4.5.7.

Exercício 5.9.14 Use a transformada \mathcal{Z} para determinar a solução das seguintes equações de diferenças:

1. $y(k) + 3y(k-1) = \alpha x(k)$, com $x(k) = \mu(k)$, $y(-1) = \beta$;
2. $y(k+2) - 5y(k+1) - 0.7y(k) = 0.5x(k+1) + 1.7x(k-1)$, com $x(k) = \mu(k)$, $y(k) = 0$ para $k \leq 0$;
3. $y(k+2) + y(k) = x(k)$, com $x(k) = \cos(k\pi)\mu(k)$, $y(0) = 0$ e $y(1) = 2$.

Exercício 5.9.15 Para cada uma das equações de diferenças do Exercício 5.9.14, determine:

1. a função de transferência $H(z)$;
2. a resposta ao impulso $h(k)$, a partir da inversa de $H(z)$;
3. a resposta forçada através da convolução de $h(k)$ com a entrada do sistema.

Exercício 5.9.16 Para as equações de diferenças do Exercício 5.9.14, decomponha a solução completa nas seguintes parcelas: solução homogênea, solução forçada, regime transiente e regime permanente.

Exercício 5.9.17 Para as seguintes funções de transferência contínuas:

$$1. H(s) = \frac{s}{s+a} \qquad 2. H(s) = \frac{s-b}{s+a} \qquad 3. H(s) = \frac{a}{s(s-a)} \qquad 4. H(s) = \frac{s}{(s+a)(s-b)}$$

determine o equivalente discreto $H_1(z)$, usando o impulso invariante, e o equivalente discreto $H_2(z)$, usando o segurador de ordem zero. Assuma os seguintes valores numéricos: $a = 3$, $b = -1/2$ e tempo de amostragem $T = 1/5$. Compare para cada caso, a resposta ao degrau de $H(s)$, $H_1(z)$ e $H_2(z)$. Em seguida, compare a resposta ao impulso

Exercício 5.9.18 Para cada uma das funções de transferência, $H(s)$, $H_1(z)$ e $H_2(z)$, do Exercício 5.9.17, analise a estabilidade a partir da função de transferência e a estabilidade BIBO.

Exercício 5.9.19 Para cada uma das funções de transferência contínuas $H(s)$, do Exercício 5.9.17, determine a equação diferencial e as equações de diferenças associadas com cada um dos equivalentes discretos $H_1(z)$ e $H_2(z)$. Assuma que a saída do sistema é denotada por y e a entrada por x .

Exercício 5.9.20 Usando o teorema do valor inicial e o teorema do valor final, calcule $f(0)$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k)$ sabendo que sua transformada Z é dada por

$$F(z) = \frac{z+1}{z(z-1)}$$

Em seguida, determine $f(k)$ e verifique o resultado obtido.

Capítulo 6

Análise de Fourier

A análise de Fourier é uma ferramenta matemática extremamente poderosa para a representação e processamento de sinais e sistemas. Ela se baseia na decomposição de funções em termos de componentes senoidais, que formam uma base ortogonal completa. Este capítulo introduz os conceitos fundamentais da análise de Fourier, incluindo séries e transformadas de Fourier, além de aplicações importantes como a função de resposta em frequência e o fenômeno de aliasing.

Inicialmente, é apresentada a série de Fourier, que permite representar sinais periódicos como uma soma ponderada de senos e cossenos. A transformada de Fourier, aplicável a sinais não-periódicos, é abordada em seguida. Esta transformada revela os espectros de frequência dos sinais, permitindo a análise das intensidades de cada frequência constituinte. A pseudotransformada de Fourier, aplicada a sinais periódicos, é discutida, destacando como ela difere da transformada de Fourier regular. Outros tópicos abordados são a função de resposta em frequência, que caracteriza a dinâmica de sistemas LTI, e o aliasing, um fenômeno indesejado que pode ocorrer na discretização de sinais.

6.1 Série de Fourier

A série de Fourier possui uma ampla gama de aplicações nas engenharias, sendo bastante utilizada na análise de sistemas físicos sujeitos a perturbações periódicas. Basicamente, a série de Fourier permite representar uma função periódica qualquer como uma soma de senos e cossenos.

Definição 6.1.1 *Um polinômio trigonométrico é uma soma finita na forma*

$$S_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$$

em que os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ são números complexos e $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T$ é a frequência fundamental do sinal cujo período é T .

Essa série pode ser reescrita em termos da função exponencial. Para isso, basta substituir a relação de Euler

$$e^{jk\omega_0 t} = \cos(k\omega_0 t) + j \sin(k\omega_0 t)$$

no polinômio acima, como segue:

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k (e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}) + \frac{b_k}{j} (e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}) \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left(a_k + \frac{b_k}{j} \right) e^{jk\omega_0 t} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left(a_k - \frac{b_k}{j} \right) e^{-jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

Agora, basta aplicar a substituição de variáveis

$$X_0 = \frac{a_0}{2}, \quad X_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k), \quad X_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k), \quad k = 1, \dots, N$$

para se obter a série em termos da exponencial:

$$(6.1) \quad S_N = \sum_{k=-N}^N X_k e^{jk\omega_0 t}$$

Usando as propriedades de ortogonalidade, é possível mostrar que

$$A. \quad \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{jk\omega_0 t} dt = \begin{cases} 1 & , \text{ se } k = 0 \\ 0 & , \text{ se } k \neq 0 \end{cases}$$

$$B. \quad X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S_N e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Essa última relação fornecerá a fórmula para calcular os coeficientes da série de Fourier.

Prova. Primeiro, a parte A será provada. Para $k = 0$, tem-se

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt = 1$$

Para $k \neq 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{jk\omega_0 t} dt &= \frac{1}{T} \left. \frac{e^{jk\omega_0 t}}{jk\omega_0} \right|_{-T/2}^{T/2} = \frac{1}{2k\omega_0 j T/2} \left(e^{jk\omega_0 T/2} - e^{-jk\omega_0 T/2} \right) \\ &= \frac{\sin(k\omega_0 T/2)}{k\omega_0 T/2} = \frac{\sin(k\pi)}{k\pi} = 0 \end{aligned}$$

Para provar a parte B, multiplicam-se ambos os lados de (6.1) por $e^{-jn\omega_0 t}$ e integra-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S_N e^{-jn\omega_0 t} dt &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_{k=-N}^N X_k e^{jk\omega_0 t} \right) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{k=-N}^N X_k \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} X_n & , \text{ se } k = n \\ 0 & , \text{ se } k \neq n \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto,

$$(6.2) \quad X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S_N e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Uma questão importante levantada por Fourier foi a análise de convergência da série trigonométrica S_N , com $N \rightarrow \infty$, de forma a aproximar uma função periódica $x(t)$ qualquer. Basicamente, deseja-se determinar quais os valores dos coeficientes X_k , de tal forma¹ que

$$x(t) \sim \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$$

¹Usa-se comumente o sinal \sim ao invés de $=$ para salientar o fato que sem condições adicionais em $x(t)$, tal como diferenciabilidade, a série pode divergir para valores particulares de t .

Assim, a série de Fourier da função periódica $x(t)$ é dada² por

$$(6.3) \quad \begin{aligned} x(t) &\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}, & \omega_0 &= 2\pi/T \\ X_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

A série de Fourier pode ser aplicada a uma classe ampla de funções. De uma forma geral, se as seguintes condições forem satisfeitas:

1. a integral $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)| dt$ converge;
2. a função $x(t)$ possui um número finito de descontinuidades finitas no intervalo $-T/2 \leq t \leq T/2$;
3. a função $x(t)$ possui um número finito de máximos e mínimos no intervalo $-T/2 \leq t \leq T/2$;

então é possível mostrar que a série de Fourier converge para a função $\bar{x}(t)$, que é igual à função $x(t)$ nos pontos de continuidade e igual à média dos limites num ponto de descontinuidade t_0 , ou seja:

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow t_0^-} x(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^+} x(t) \right] & , \text{ para } -\frac{T}{2} < t_0 < \frac{T}{2} \\ \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow -\frac{T}{2}^+} x(t) + \lim_{t \rightarrow \frac{T}{2}^-} x(t) \right] & , \text{ para } t_0 = \pm \frac{T}{2} \end{cases}$$

Note que é imaterial como o sinal $x(t)$ está definido num ponto de descontinuidade. No mais, sabendo que $\bar{x}(t)$ difere de $x(t)$ apenas nos pontos de descontinuidade, como exposto acima, a série de Fourier de $x(t)$ será denotada simplesmente por $x(t)$, daqui em diante.

Exemplo 6.1.1 Considere a onda quadrada, de amplitude A e período T , apresentada na figura Figura 6.1.

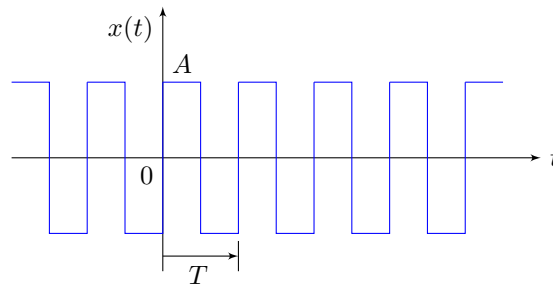


Figura 6.1: Onda quadrada de amplitude A e período T .

²Dada a periodicidade, a integral pode ser calculada sobre qualquer intervalo de comprimento T , tal como \int_0^T ou, de uma forma mais geral, por \int_b^{b+T} , com b um número real.

Para obter a sua série de Fourier, basta calcular os coeficientes X_k usando (6.3) como segue:

$$\begin{aligned}
 X_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\
 &= -\frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 A e^{-jk2\pi t/T} dt + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} A e^{-jk2\pi t/T} dt \\
 &= -\frac{A}{T} \frac{T}{-j2\pi k} (1 - e^{jk\pi}) + \frac{A}{T} \frac{T}{-j2\pi k} (e^{-jk\pi} - 1) \\
 &= \frac{A}{j2\pi k} [2 - e^{jk\pi} - e^{-jk\pi}] \\
 &= \frac{A}{j2\pi k} [2 - 2\cos(\pi k)] \\
 &= \frac{Aj}{\pi k} [\cos(\pi k) - 1] = \begin{cases} 0 & , \text{ se } k \text{ for par} \\ -\frac{2Aj}{\pi k} & , \text{ se } k \text{ for ímpar} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Perceba que os coeficientes X_k são números complexos, podem, portanto, ser representados na forma $X_k = re^{j\theta}$, com r e θ respectivamente dados por

$$\begin{aligned}
 r = |X_k| &= \begin{cases} 0 & , \text{ se } k \text{ for par} \\ \frac{2A}{\pi|k|} & , \text{ se } k \text{ for ímpar} \end{cases} \\
 \theta = \angle X_k &= \begin{cases} \text{indefinido} & , \text{ se } k \text{ for par} \\ -\text{sinal}(k) \frac{\pi}{2} & , \text{ se } k \text{ for ímpar} \end{cases}
 \end{aligned}$$

em que a função $\text{sinal}(x)$ será -1 se x for negativo e $+1$ se x for positivo. A Figura 6.2 abaixo apresenta o valor absoluto $|X_k|$ e a fase $\angle X_k$ do coeficiente complexo X_k .

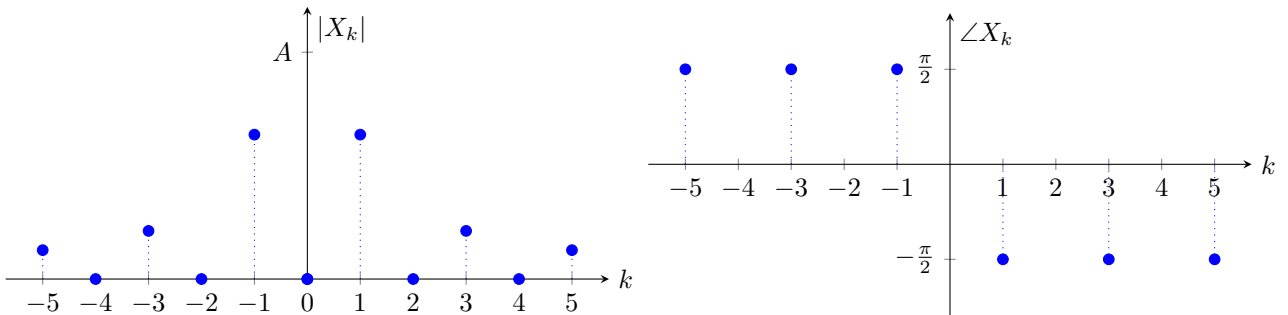


Figura 6.2: Diagrama do valor absoluto e da fase de X_k .

A Figura 6.3 apresenta a onda quadra, de amplitude A e período T , e sua série de Fourier com apenas o primeiro termo (vermelho), que representa a componente fundamental, e com os onze primeiros termos (azul).

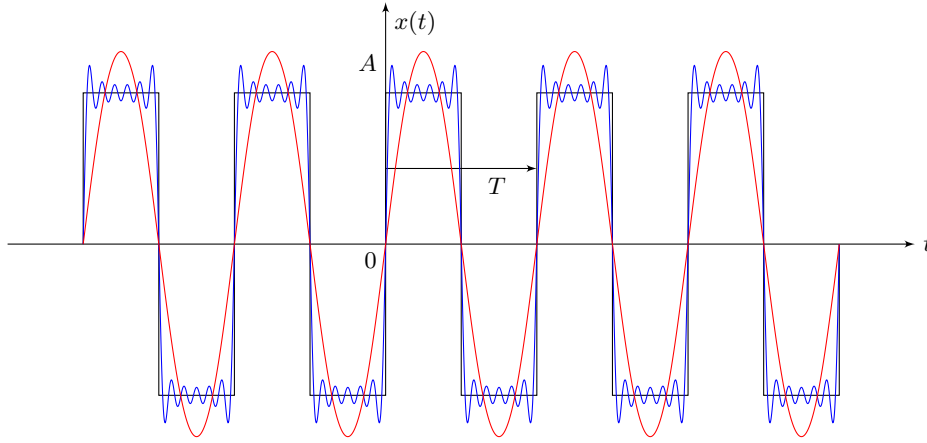


Figura 6.3: Onda quadrada de amplitude A e período T , sua primeira fundamental (vermelho) e sua série de Fourier contendo os onze primeiros termos (azul).

Definição 6.1.2 (Efeito de Gibbs) *Como pode ser visto na Figura 6.3, existe uma oscilação próxima a pontos de descontinuidade da função. Nessas pontos, a série de Fourier não converge uniformemente. Gibbs observou que o valor da oscilação próximo a um ponto de descontinuidade não se aproxima do valor da função, por maior que seja o número de termos utilizados para calcular a série de Fourier. A amplitude máxima da oscilação é dada por:*

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx - \frac{1}{2} \approx 8.95\%$$

6.1.1 Série trigonométrica de Fourier

A série de Fourier também pode ser descrita em termos da função seno e cosseno. Nesse caso, a série é dada por

$$(6.4) \quad x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)], \quad \omega_0 = 2\pi/T$$

com

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Os coeficientes a_k e b_k dessa série estão relacionados aos coeficientes X_k da série exponencial, como descrito no Exercício 6.6.1, através da relação $a_k = X_k + X_{-k}$, para $k \geq 0$, e $b_k = j(X_k - X_{-k})$ para $k \geq 1$.

Perceba que qualquer função pode ser expressa como a soma de uma função $f_p(t)$ par, tal que $f_p(t) = f_p(-t)$, e uma função $f_i(t)$ ímpar, tal que $f_i(t) = -f_i(-t)$, como ilustrado no Exemplo 6.1.2 abaixo.

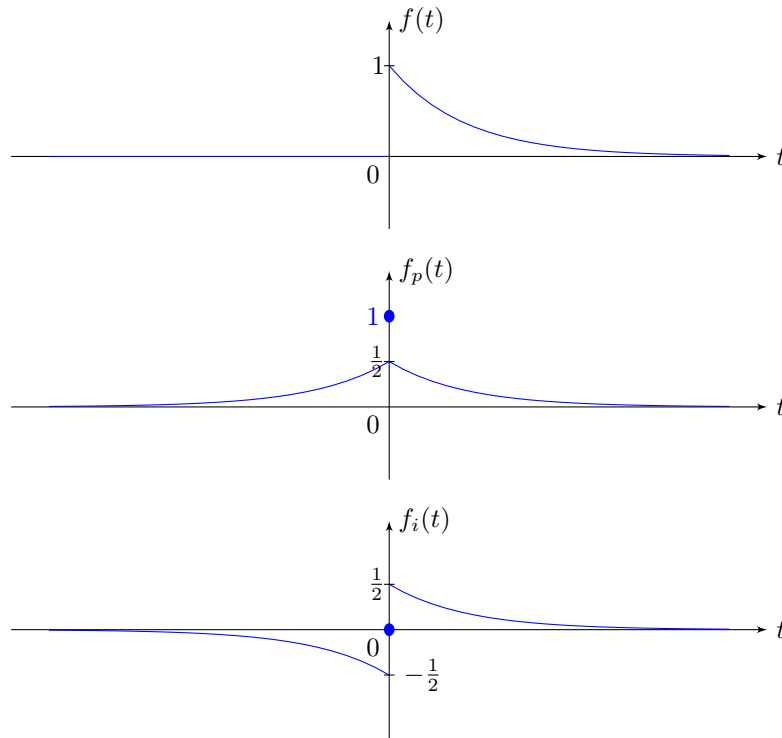
Exemplo 6.1.2 *Seja a função $f(t)$ dada por*

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & , \text{ se } t \geq 0 \\ 0 & , \text{ se } t < 0 \end{cases}$$

Essa função pode ser escrita como a soma da função par $f_p(t)$ e a função ímpar $f_i(t)$, respectivamente dadas por

$$f_p(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t} & , \text{ se } t > 0 \\ 1 & , \text{ se } t = 0 \\ \frac{1}{2}e^t & , \text{ se } t < 0 \end{cases} \quad e \quad f_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-t} & , \text{ se } t > 0 \\ 0 & , \text{ se } t = 0 \\ -\frac{1}{2}e^t & , \text{ se } t < 0 \end{cases}$$

A figura abaixo apresenta a função $f(t) = f_p(t) + f_i(t)$ e suas componentes par $f_p(t)$ e ímpar $f_i(t)$.



Se a função $x(t)$ for par, a série de Fourier dependerá apenas da função cosseno e se reduzirá a

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt$$

Essa simplificação decorre diretamente do fato de que $f_p(t) := x(t) \cos(k\omega_0 t)$ será par e $f_i(t) := x(t) \sin(k\omega_0 t)$ será ímpar. Assim:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f_p(t) dt = 2 \int_0^{T/2} f_p(t) dt \quad \text{e} \quad \int_{-T/2}^{T/2} f_i(t) dt = 0, \quad f_i(0) = 0$$

Por outro lado, se a função $x(t)$ for ímpar, a série de Fourier dependerá apenas da função seno e se reduzirá a

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

já que $x(t) \cos(k\omega_0 t)$ será agora ímpar e $x(t) \sin(k\omega_0 t)$ par.

Exemplo 6.1.3 Considere o circuito resistor-capacitor da Figura 6.4. Para esse sistema, determine a tensão de saída $v(t)$ para uma tensão de entrada $p(t)$ dada pela função dente de serra apresentada na Figura 6.5.

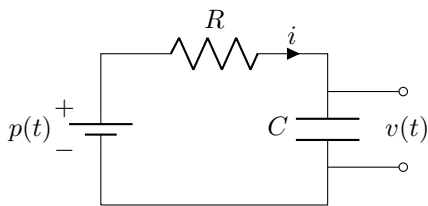


Figura 6.4: Circuito resistor-capacitor.

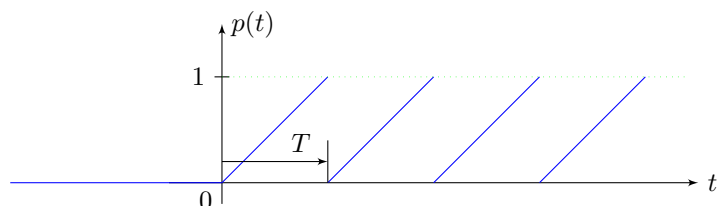


Figura 6.5: Função dente de serra.

Sabe-se que a solução forçada $v(t)$ para uma entrada $p(t)$ qualquer é dada pela integral de convolução

$$v(t) = h(t) * p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)p(t - \sigma) d\sigma$$

em que $h(t)$ é a resposta ao impulso do sistema. Lembrando que a equação diferencial que governa esse sistema é dada por

$$\tau \dot{v}(t) + v(t) = p(t), \quad \tau = RC$$

sua resposta ao impulso é facilmente determinada (ver Exercício 3.8.29) como sendo

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \mu(t)$$

com $\mu(t)$ o degrau unitário.

Para calcular a convolução acima de uma forma prática, pode-se recorrer à série de Fourier. Porém, como a função $p(t)$ da Figura 6.5 acima não é periódica, já que $p(t) = 0$ para $t < 0$, é preciso usar sua extensão periódica $g(t)$, que tem a forma apresentada na Figura 6.26 do Exercício 6.6.7. A série de Fourier dessa função é dada por

$$g(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{k}, \quad g_k = \sin(\omega_k t), \quad \omega_k = k\omega_0, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Note que a função original do problema é simplesmente $p(t) = g(t)\mu(t)$. Assim, a resposta do sistema ao termo constante $g_0 = 1/2\mu(t)$ (veja o Exercício 3.8.30) é dada por

$$v_{g_0} = \frac{1}{2} (1 - e^{-t/\tau}), \quad t \geq 0$$

e a resposta a cada um dos termos $g_k = \sin(\omega_k t)\mu(t)$ é dada pela convolução

$$\begin{aligned} v_{g_k} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau} e^{-\sigma/\tau} \mu(\sigma) \sin(\omega_k(t - \sigma)) \mu(t - \sigma) d\sigma = \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-\sigma/\tau} \sin(\omega_k(t - \sigma)) d\sigma \\ &= \frac{\tau}{1 + \tau^2 \omega_k^2} \left[\omega_k (e^{-t/\tau} - \cos(\omega_k t)) + \frac{1}{\tau} \sin(\omega_k t) \right], \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Portanto, a solução forçada do circuito elétrico para a entrada $p(t)$ da Figura 6.5 fica sendo

$$v(t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-t/\tau}) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_{g_k}}{k}, \quad t \geq 0$$

A tensão de saída $v(t)$ juntamente com a tensão de entrada $p(t)$ estão apresentadas na Figura 6.6 abaixo.

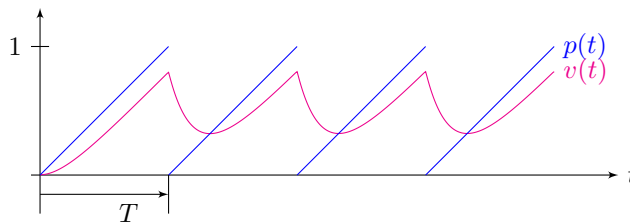


Figura 6.6: Tensões de saída $v(t)$ e de entrada $p(t)$.

A seguir é apresentado um teorema, conhecido como Teorema da Energia de Rayleigh ou Teorema de Parseval, que relaciona os coeficientes da série de Fourier com uma certa integral da função periódica $x(t)$, que pode ser interpretada como a energia ou potência do sinal.

Teorema 6.1.1 (Teorema de Parseval) *Sejam a_k e b_k (resp. X_k) os coeficientes da série de Fourier da função periódica $x(t)$, de período T . Então, pode-se mostrar que*

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

6.2 Transformada de Fourier

O par de transformadas de Fourier é dado por

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

A última relação é chamada de transformada inversa de Fourier. O par de transformadas de Fourier³ pode ainda ser descrito em termos da frequência angular $\omega = 2\pi f$ rad/s como segue:

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

As condições para a existência da transformada de Fourier e sua inversa são em geral complicadas e não serão aqui tratadas.

Exemplo 6.2.1 *Seja a função pulso de amplitude A e largura τ , apresentada na Figura 6.7.*

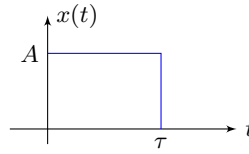


Figura 6.7: Função pulso de amplitude A e largura τ .

Aplicando a transformada de Fourier no sinal $x(t)$, obtém-se

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = A \int_0^{\tau} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{A e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \Big|_0^{\tau} = \frac{A}{-j2\pi f} [e^{-j2\pi f\tau} - 1]$$

$$= \frac{A}{\pi f} \frac{e^{-j\pi f\tau}}{2j} [e^{j\pi f\tau} - e^{-j\pi f\tau}]$$

Lembrando que

$$\sin \theta = \frac{1}{2j} [e^{j\theta} - e^{-j\theta}]$$

tem-se

$$X(f) = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi f\tau) e^{-j\pi f\tau}$$

Que pode ainda ser reescrito como

$$X(f) = A\tau \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau} e^{-j\pi f\tau} = A\tau \operatorname{sinc}(\pi f\tau) e^{-j\pi f\tau}$$

com a função sinc definida por

$$(6.5) \quad \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Para calcular a parte real e a parte imaginária, expande-se $X(f)$ como segue:

$$X(f) = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi f\tau) [\cos(\pi f\tau) - j \sin(\pi f\tau)]$$

³Fatores de normalização podem ser aplicados nas expressões para a transformada de Fourier. Na versão em termos da frequência em Hertz, as expressões modificadas são $X(f) = \alpha \int x(t) e^{-j2\pi ft} dt$ e $x(t) = \beta \int e^{j2\pi ft} df$, com $\alpha\beta = 1$. Similarmente, na formulação em termos da frequência angular, as expressões ficam sendo $X(\omega) = \alpha \int x(t) e^{-j\omega t} dt$ e $x(t) = \beta \int X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$, com $\alpha\beta = 1/(2\pi)$.

Utilizando as identidades trigonométricas

$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \quad e \quad \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\theta)}{2}$$

tem-se

$$X(f) = \frac{A}{\pi f} \left[\frac{\sin(2\pi f\tau)}{2} + j \frac{\cos(2\pi f\tau) - 1}{2} \right]$$

Assim, a parte real e a parte imaginária de $X(f)$ são dadas respectivamente por

$$\operatorname{Re}(X(f)) = A\tau \operatorname{sinc}(2\pi f\tau) \quad e \quad \operatorname{Im}(X(f)) = A\tau \frac{\cos(2\pi f\tau) - 1}{2\pi f\tau} = -A\tau \sin(\pi f\tau) \operatorname{sinc}(\pi f\tau)$$

O valor absoluto e a fase de $X(f)$ são dados respectivamente por

$$|X(f)| = A\tau |\operatorname{sinc}(\pi f\tau)| \quad e \quad \angle X(f) = \operatorname{atan2}(\operatorname{Im}(X(f)), \operatorname{Re}(X(f)))$$

em que $\operatorname{atan2}$ é a função arco-tangente⁴ que considera todos os quatro quadrantes do plano imaginário. A Figura 6.8 apresenta o gráfico de $|X(f)|$ e $\angle X(f)$. Observe que $X(-f) = X^*(f)$, assim, a função $|X(f)|$ é par e a função $\angle X(f)$ é ímpar.

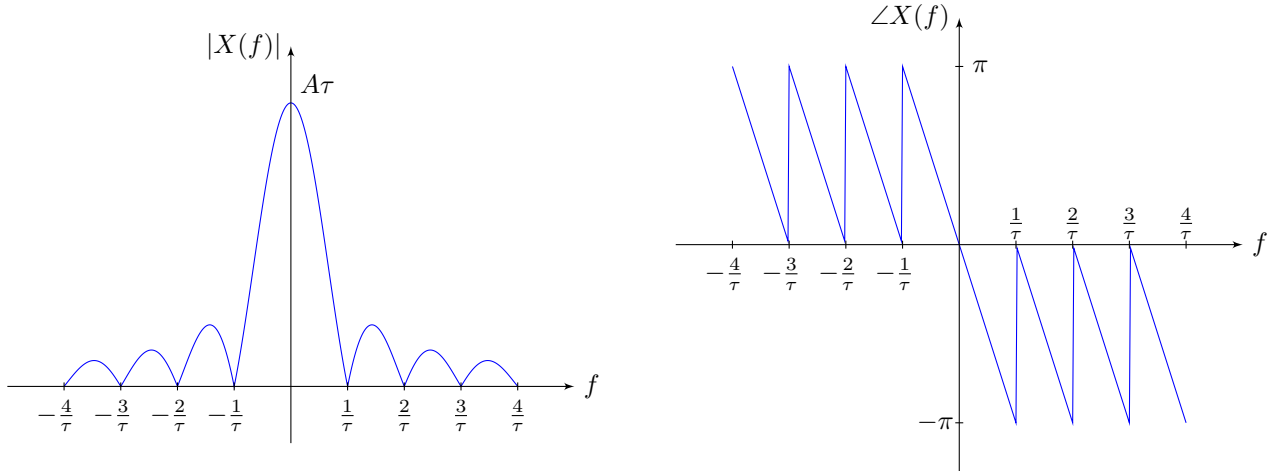


Figura 6.8: Gráfico da função $|X(f)|$ e $\angle X(f)$ para $A = 5$.

6.2.1 Propriedades da transformada de Fourier

As propriedades da transformada de Fourier são muito semelhantes às propriedades da transformada de Laplace. Suponha que a relação entre a função $f(t)$ e sua transformada de Fourier $F(f)$ seja denotada por

$$f(t) \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} F(f)$$

Então, as seguintes propriedades são verdadeiras

1. Linearidade:

$$af(t) + bg(t) \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} aF(f) + bG(f)$$

2. Convolução no tempo:

$$f(t) * g(t) \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} F(f)G(f)$$

3. Convolução na frequência:

$$f(t)g(t) \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} F(f) * G(f)$$

⁴Ver Apêndice A.1

4. Conjugado:

$$\overline{f(t)} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \overline{F(-f)}$$

5. Escala no tempo com $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$f(\alpha t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|\alpha|} F(f/\alpha)$$

6. Translação no tempo:

$$f(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j2\pi f t_0} F(f)$$

7. Teorema de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) \overline{G(f)} df$$

8. Teorema de Plancharel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)|^2 df$$

6.3 Pseudotransformada de Fourier

Aplicando a transformada de Fourier na função⁵ delta de Dirac $\delta(t - t_0)$, obtém-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j2\pi f t_0}$$

Portanto, a transformada inversa de Fourier de $e^{-j2\pi f t_0}$ fornece $\delta(t - t_0)$, ou seja,

$$\delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-j2\pi f t_0}) e^{j2\pi f t} df$$

De forma análoga, calculando a transformada inversa de $\delta(f - f_0)$, obtém-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) e^{j2\pi f t} df = e^{j2\pi f_0 t}$$

Portanto, a transformada de Fourier de $e^{j2\pi f_0 t}$ fornece $\delta(f - f_0)$, ou seja,

$$(6.6) \quad \delta(f - f_0) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j2\pi f_0 t}) e^{-j2\pi f t} dt$$

A partir dessas propriedades, pode-se obter uma pseudotransformada de Fourier para sinais periódicos. Se $x(t)$ é um sinal periódico, de período T , então pode-se escrever $x(t)$, usando a série de Fourier, como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k t / T}$$

Aplicando a transformada de Fourier, em ambos os lados da equação acima, tem-se

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k t / T} \right) e^{-j2\pi f t} dt$$

Definindo $f_k = k/T$ e trocando a ordem da somatória com a integral, tem-se

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j2\pi f_k t}) e^{-j2\pi f t} dt$$

Assim, usando (6.6), obtém-se

$$(6.7) \quad X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - f_k)$$

Essa expressão indica que o espectro de $x(t)$ é composto de impulsos de amplitude X_k na frequência f_k , ou seja, localizados em frequências múltiplas de $1/T$.

⁵Veja a definição da função delta de Dirac dada por (3.1) na Seção 3.1.

Exemplo 6.3.1 Considere a função periódica $x(t) = \sin(w_0 t)$ com $w_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T$. Pode-se reescrever essa função como

$$x(t) = \frac{1}{2j} [e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}] = \frac{j}{2} [e^{-j2\pi f_0 t} - e^{j2\pi f_0 t}]$$

Portanto a sua pseudotransformada é dada por

$$X(f) = \frac{j}{2} [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$$

A sua representação gráfica está apresentada na figura abaixo.



Exemplo 6.3.2 Considere a função periódica $x(t) = \cos(w_0 t)$ com $w_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T$. Pode-se reescrever essa função como

$$x(t) = \frac{1}{2} [e^{-j2\pi f_0 t} + e^{j2\pi f_0 t}]$$

Portanto, a sua pseudotransformada é dada por

$$X(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

A sua representação gráfica está apresentada na figura abaixo



Exemplo 6.3.3 Considere a onda quadrada do exemplo 6.1.1. Sua série de Fourier é dada por

$$x(t) = \sum_{k=1,3,5,7,\dots}^{\infty} \frac{4A}{k\pi} \sin(k\omega_0 t)$$

com $w_0 = 2\pi f_0$. Portanto, sua transformada de Fourier é dada por

$$X(f) = \sum_{k=1,3,5,7,\dots}^{\infty} \frac{2Aj}{k\pi} [\delta(f + f_k) - \delta(f - f_k)]$$

com $f_k = kf_0$.

Uma relação fundamental entre a série de Fourier e a transformada de Fourier reside em como ambas relacionam funções no domínio do tempo ao seu conteúdo de frequência. Enquanto a série de Fourier decompõe funções periódicas através de uma combinação infinita de senos e cossenos, expondo a contribuição de cada componente de frequência da função original, a transformada de Fourier converte funções, sejam elas periódicas ou não periódicas, do domínio do tempo para o da frequência, revelando assim seus espectros e a intensidade das frequências presentes. Para uma função periódica, a transformada de Fourier gera uma série de impulsos ponderados pelos coeficientes de Fourier de sua série, conforme apresentado em (6.7).

6.4 Função de resposta em frequência

A medição mais comum da função de transferência em sistemas mecânicos é a função de resposta em frequência (FRF), que descreve a relação entrada-saída para uma excitação harmônica. Na área de vibrações, as medições de resposta em frequência são amplamente utilizadas na análise modal de estruturas mecânicas.

Para desenvolver essa relação representada pela FRF, suponha que a entrada de um sistema qualquer descrito pela função de transferência

$$H(s) := \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

seja dada por

$$x(t) = e^{j\omega t} \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad X(s) = \frac{1}{s - j\omega}$$

Para essa entrada, a saída do sistema é dada por

$$Y(s) = H(s)X(s) = H(s) \frac{1}{s - j\omega}$$

Assumindo que os polos de $H(s)$ são distintos, a expansão em frações parciais fornece

$$Y(s) = \frac{a}{s - j\omega} + \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \dots + \frac{c_n}{s - p_n}$$

que no domínio do tempo fica sendo

$$y(t) = ae^{j\omega t} + c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \dots + c_n e^{p_n t}$$

Assumindo que todos os polos p_i são estáveis, ou seja que $\text{Re}[p_i] < 0$, a resposta em **regime permanente** passa a ser

$$y_{ss}(t) = ae^{j\omega t}$$

em que o resíduo a é dado por

$$a = Y(s)(s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = H(s) \frac{1}{s - j\omega} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = H(j\omega)$$

ou seja

$$y_{ss}(t) = H(j\omega) e^{j\omega t}$$

De forma análoga, a resposta em regime permanente para a entrada

$$x(t) = e^{-j\omega t}$$

é dada por

$$y_{ss}(t) = H(-j\omega) e^{-j\omega t}$$

Desta forma, a resposta em regime permanente para a entrada

$$x(t) = \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

fica sendo

$$y_{ss}(t) = \frac{1}{2j} (H(j\omega) e^{j\omega t} - H(-j\omega) e^{-j\omega t})$$

Como $H(j\omega)$ é um número complexo, ele pode ser escrito como

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\phi}$$

e seu conjugado como

$$H(-j\omega) = |H(-j\omega)| e^{-j\phi} = |H(j\omega)| e^{-j\phi}$$

em que $|H(j\omega)|$ é sua magnitude e $\phi = \angle H(j\omega)$ é o ângulo de fase. Assim, a resposta em regime permanente para a entrada senoidal fica sendo

$$(6.8) \quad \begin{aligned} y_{ss}(t) &= \frac{1}{2j} (|H(j\omega)|e^{j\phi}e^{j\omega t} - |H(j\omega)|e^{-j\phi}e^{-j\omega t}) = |H(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \\ &= |H(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Observação 6.4.1 Note que o mesmo resultado poderia ter sido obtido usando diretamente a entrada

$$x(t) = \sin \omega t \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad X(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

fornecendo a saída, expressa pela seguinte expansão em frações parciais (polos distintos):

$$\begin{aligned} Y(s) &= H(s)X(s) = H(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - p_n} \end{aligned}$$

ou seja

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + c_1e^{p_1t} + c_2e^{p_2t} + \cdots + c_ne^{p_nt}, \quad t \geq 0$$

Assim, assumindo polos estáveis ($\text{Re}[p_i] < 0$), a resposta em **regime permanente** fica sendo

$$y_{ss}(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t}$$

Para esse caso, os coeficientes a e \bar{a} são dados respectivamente por

$$a = H(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = \frac{-H(-j\omega)}{2j} \quad e \quad \bar{a} = \frac{H(j\omega)}{2j}$$

Portanto, a resposta em regime permanente para a entrada senoidal fica sendo

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) &= \frac{-H(-j\omega)}{2j} e^{-j\omega t} + \frac{H(j\omega)}{2j} e^{j\omega t} = |H(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \\ &= |H(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

que é exatamente o resultado obtido em (6.8).

A função $H(j\omega)$ é denominada de **Função de Resposta em Frequência (FRF)**. Como visto acima, essa função apresenta a **relação de amplitude e ângulo em regime permanente entre a saída senoidal e a entrada senoidal** dada por

$$|H(j\omega)| = \frac{|Y(j\omega)|}{|X(j\omega)|} \quad e \quad \angle H(j\omega) = \angle \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

Exemplo 6.4.1 Para ilustrar uma aplicação prática da FRF, considere o sistema mecânico apresentado na Figura 6.9, cuja função de transferência é dada por

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

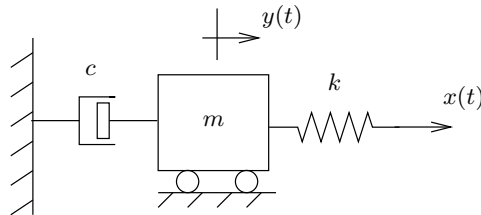


Figura 6.9: Sistema mecânico massa-mola-amortecedor.

A Figura 6.10 apresenta o gráfico de magnitude e fase da FRF desse sistema, ou seja de $H(j\omega)$, em que foi assumindo que o fator de amortecimento é dado por $\zeta = 0.2$ e a frequência natural por $\omega_n = 1$ rad/s.

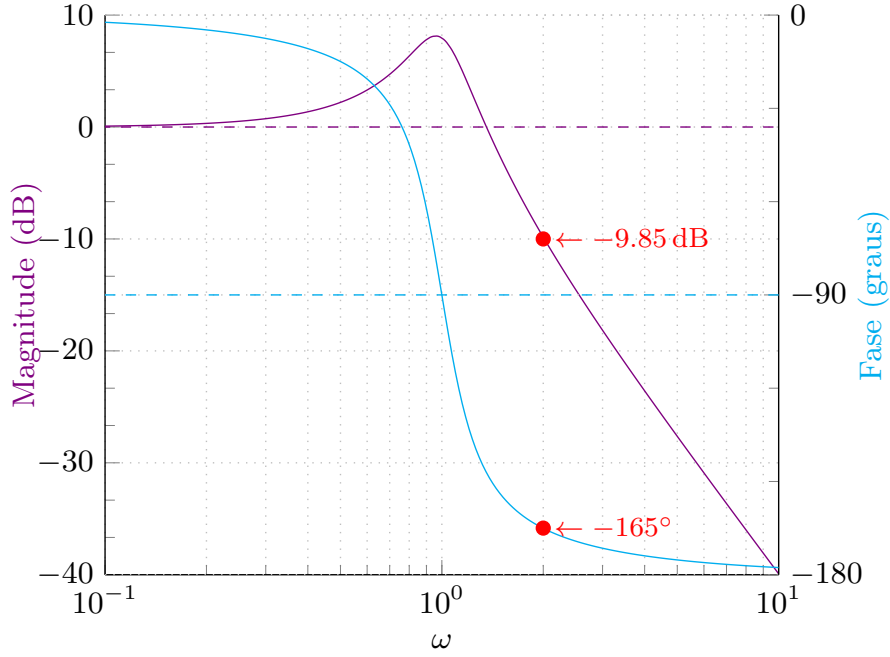


Figura 6.10: Diagrama de magnitude e fase da FRF de $H(j\omega)$.

Suponha que seja aplicada nesse sistema uma entrada senoidal $x(t) = 5 \sin(2t)$, então a saída pode ser facilmente determinada através da FRF apresentada na Figura 6.10. De acordo com o gráfico, na frequência $\omega = 2$ rad/s, tem-se

$$|H(j\omega)|_{\omega=2} = -9.85 \text{ dB} = 0.32 \quad e \quad \angle H(j\omega)|_{\omega=2} = -165^\circ = -2.89 \text{ rad}$$

Portanto, a saída em regime permanente será

$$y_{ss}(t) = 5 \times 0.32 \times \sin(2t - 2.89) = 1.6 \sin(2t - 2.89)$$

A função de resposta em frequência (FRF), para sistemas contínuos, pode ainda ser definida como

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

ou seja, como sendo a transformada de Fourier da resposta ao impulso $h(t)$. Perceba a relação da FRF com a definição da transformada de Fourier e da transformada de Laplace com os valores de s restritos ao eixo imaginário, ou seja, $s = j\omega$.

Tanto a função de transferência $H(s)$ como a função de resposta em frequência $H(j\omega)$ relacionam a saída de um sistema com sua entrada. Para um sistema contínuo linear invariante no tempo e causal, se a entrada for dada por

$$x(t) = X_k e^{s_k t}, \quad \text{com } s_k \in \mathbb{C},$$

então sua saída $y(t)$, assumindo que s_k não é um polo de $H(s)$, será dada por

$$y(t) = H(s_k) X_k e^{s_k t} = H(s_k) x(t)$$

Para ver esse fato, basta calcular a resposta forçada como segue:

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) X_k e^{s_k(t-\tau)} d\tau = X_k e^{s_k t} \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-s_k \tau} d\tau \\ &= X_k e^{s_k t} H(s_k) = H(s_k) x(t) \end{aligned}$$

em que foi utilizado que $h(\tau) = 0$ para $\tau < 0$ devido à causalidade do sistema.

Considerando agora um sinal de entrada periódico representado pela seguinte série de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = 2\pi f$$

e aplicando o princípio da superposição, a saída será dada por

$$(6.9) \quad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\omega_0) X_k e^{jk\omega_0 t}$$

Portanto, $y(t)$ também é periódica com a mesma frequência fundamental de $x(t)$. Se $\{X_k\}$ for o conjunto de coeficientes de Fourier de $x(t)$, então $\{X_k H(jk\omega_0)\}$ será o conjunto de coeficientes de Fourier de $y(t)$.

Exemplo 6.4.2 Considere o circuito RC do Exemplo 6.1.3, cuja equação diferencial é dada por

$$\tau \dot{v}(t) + v(t) = p(t), \quad \tau = RC$$

Para determinar a FRF desse sistema, observa-se que, para uma entrada $p(t) = e^{j\omega t}$, obtém-se a saída $v(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$. Substituindo essas expressões na equação diferencial, tem-se

$$\tau \frac{d}{dt} [H(j\omega)e^{j\omega t}] + H(j\omega)e^{j\omega t} = e^{j\omega t}$$

que fornece

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2} - j \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}$$

Para essa FRF, a magnitude $|H(j\omega)| = (1 + (\omega\tau)^2)^{-1/2}$ e a fase $\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega\tau)$ estão apresentadas na Figura 6.11. Percebe-se que as componentes de alta frequência são praticamente filtradas. Esse é o princípio dos filtros passa-baixa.

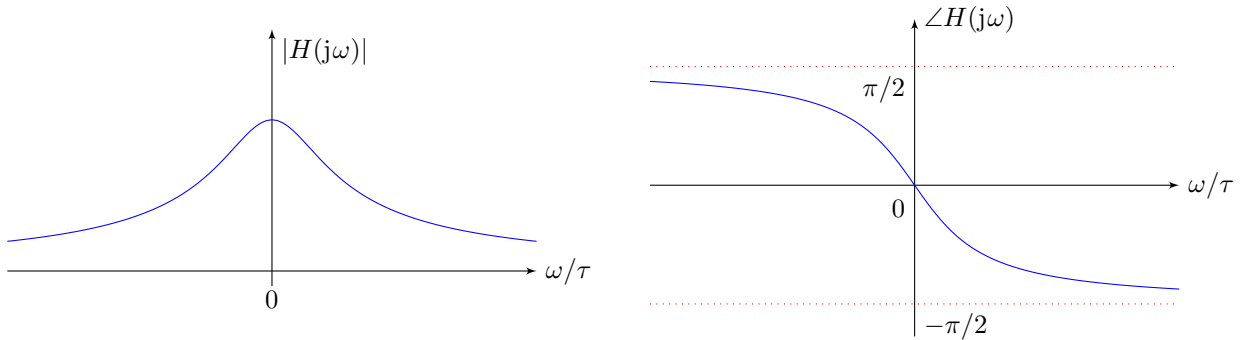


Figura 6.11: Função de resposta em frequência para o circuito RC em que a saída é a tensão do capacitor.

Exemplo 6.4.3 Suponha que a tensão de entrada $p(t)$ no Exemplo 6.4.2 seja a onda quadrada do Exemplo 6.1.1, de amplitude A e período T , cujos coeficientes de Fourier foram determinados como sendo

$$X_k = \frac{Aj}{\pi k} (\cos(\pi k) - 1)$$

Então, os coeficiente de Fourier da tensão de saída $v(t)$ são dados por

$$V_k = X_k H(jk\omega_0) = \frac{Aj}{\pi k} (\cos(\pi k) - 1) \frac{1}{1 + jk\omega_0\tau}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

e a respectiva tensão de saída (a tensão no capacitor) será dada por (6.9), ou seja:

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V_k e^{j2\pi kt/T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{AT(\cos(\pi k) - 1)}{k\pi(2k\pi\tau - jT)} e^{j2\pi kt/T}$$

A figura abaixo apresenta a tensão de entrada $p(t)$ e a tensão de saída $v(t)$, obtidos com a série de Fourier calculada usando apenas os trinta primeiros coeficientes da série. Os dados numéricos usados na simulação foram $A = 3$, $\tau = 0.1$ e $T = 1.5$.

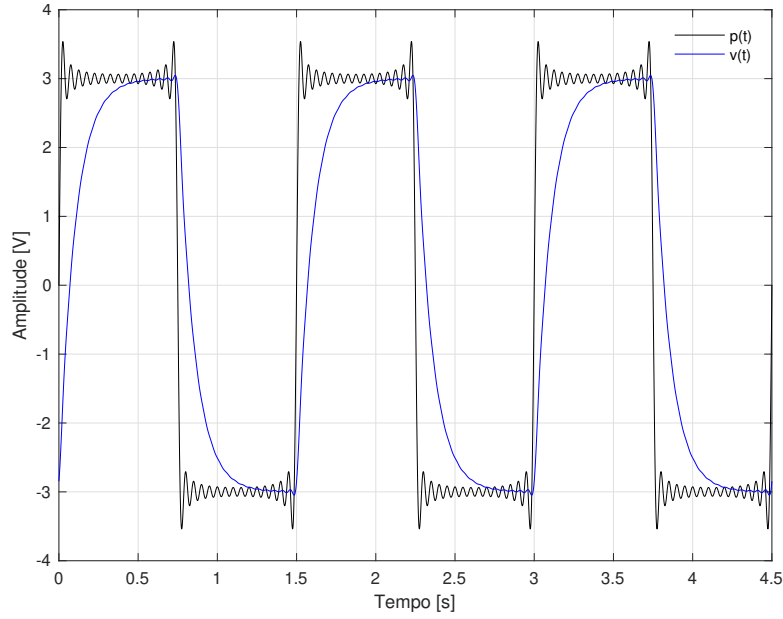


Figura 6.12: Sinais $p(t)$ e $v(t)$ calculados usando os trinta primeiros coeficientes da série de Fourier.

Exemplo 6.4.4 Considere agora que a saída do circuito do Exemplo 6.4.2 como sendo a tensão do resistor. Então, a equação diferencial que governa o sistema é dada por

$$\tau \dot{v}_r(t) + v_r(t) = \tau \dot{p}(t), \quad \tau = RC$$

Usando passos análogos aos usados no exemplo anterior, a FRF é facilmente determinada como sendo

$$H(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{(\omega\tau)^2}{1 + (\omega\tau)^2} + j \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}$$

Para essa FRF, a magnitude

$$|H(j\omega)| = \frac{|\omega\tau|}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

e a fase

$$\angle H(j\omega) = \text{senal}(\omega\tau) \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\omega\tau)$$

estão apresentados na Figura 6.13. Ao contrário do exemplo anterior, essa FRF permite a passagem de componentes de alta frequência e praticamente filtra as de baixa frequência. Esse é o princípio dos filtros passa-alta.

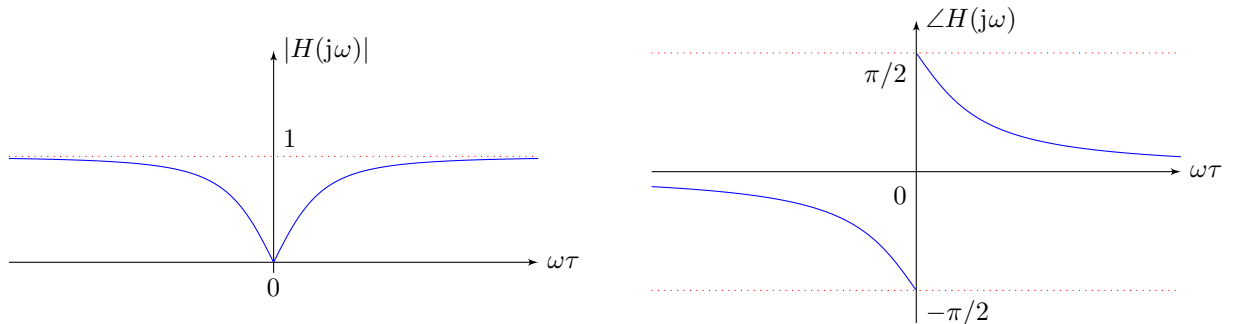


Figura 6.13: Função de resposta em frequência para o circuito RC em que a saída é a tensão do resistor.

6.4.1 Caso discreto

Para o caso discreto, a função de resposta em frequência (FRF) é definida como

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}$$

Perceba a semelhança da FRF com a definição da transformada \mathcal{Z} com $z = e^{j\omega}$. Para essa escolha de z , tem-se que $|z| = 1$, ou seja, z está restrito ao círculo unitário.

De forma análoga ao caso contínuo, para um sistema discreto linear invariante no tempo, se a entrada for dada por

$$x(k) = \bar{X}e^{j\omega k}$$

então a saída em regime permanente será dada por

$$y(k) = \bar{X}H(e^{j\omega})e^{j\omega k}$$

A prova é análoga ao do caso contínuo, basta calcular a saída forçada como segue:

$$\begin{aligned} y(k) &= h(k) * x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)x(k-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\bar{X}e^{j\omega(k-n)} \\ &= \bar{X}e^{j\omega k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = \bar{X}e^{j\omega k} H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Exemplo 6.4.5 Considere a equação

$$y_k - ay_{k-1} = x_k$$

Para determinar a FRF desse sistema, observa-se que para uma entrada $x_k = e^{j\omega k}$, obtém-se a saída $y_k = H(e^{j\omega})e^{j\omega k}$. Portanto,

$$H(e^{j\omega})e^{j\omega k} - aH(e^{j\omega})e^{j\omega(k-1)} = e^{j\omega k}$$

Fornecendo assim a FRF

$$(6.10) \quad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Fazendo a substituição $z = e^{j\omega}$ na FRF acima, obtém-se

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

que também poderia ser obtida aplicando a transformada \mathcal{Z} diretamente na equação de diferenças acima. A resposta ao impulso desse sistema é dada por

$$h(k) = a^k, \quad k \geq 0$$

Para a FRF (6.10), o valor absoluto e a fase estão apresentados na Figura 6.14 para $a = 0,5$ e na Figura 6.15 para $a = -0,5$. Perceba que essa FRF é periódica de período 2π .

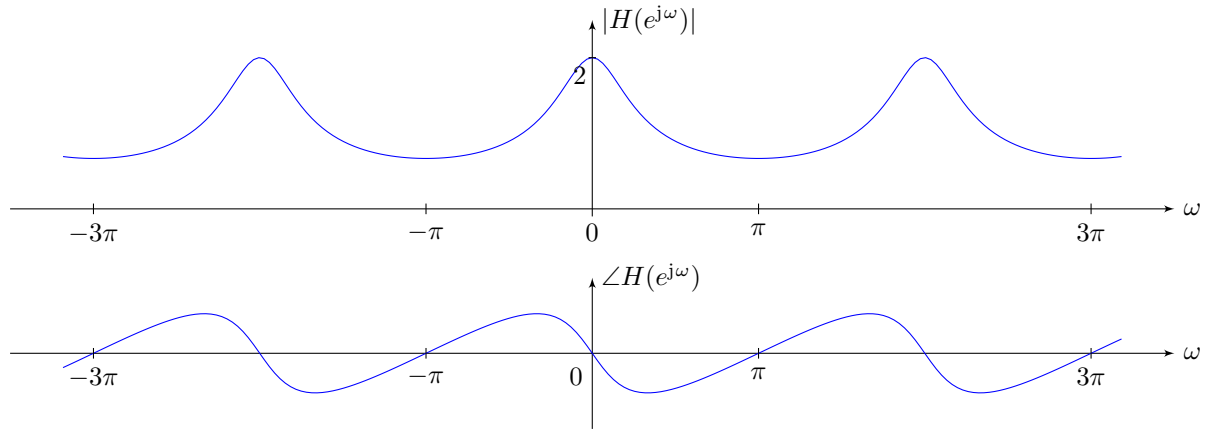


Figura 6.14: Diagrama de magnitude e de fase da função de resposta em frequência $H(e^{j\omega})$ com $a = 0,5$.

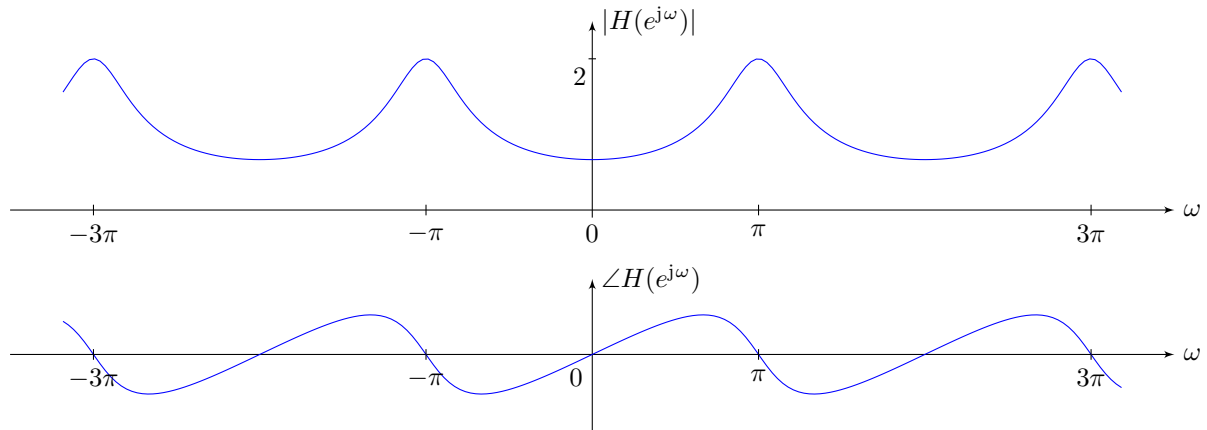


Figura 6.15: Diagrama de magnitude e de fase da função de resposta em frequência $H(e^{j\omega})$ com $a = -0,5$.

Exemplo 6.4.6 Considere a “média móvel” dada por

$$2y_k = x_k - x_{k-1}$$

A sua resposta ao impulso nada mais é que

$$h_k = \frac{1}{2} (\delta_k - \delta_{k-1})$$

Portanto

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-j\omega k} = \frac{1}{2} (1 - e^{-j\omega}) = \frac{1}{2} e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}) = j e^{-j\omega/2} \sin(\omega/2)$$

Notando que $j = e^{j\pi/2}$, obtém-se finalmente

$$H(e^{j\omega}) = e^{j(\pi-\omega)/2} \sin(\omega/2)$$

Sua magnitude e fase são respectivamente dados por

$$|H(e^{j\omega})| = |\sin(\omega/2)|, \quad \angle H(e^{j\omega}) = \text{atan2}(\text{Im}(H), \text{Re}(H))$$

Para essa FRF, o valor absoluto e a fase estão apresentados na Figura 6.16

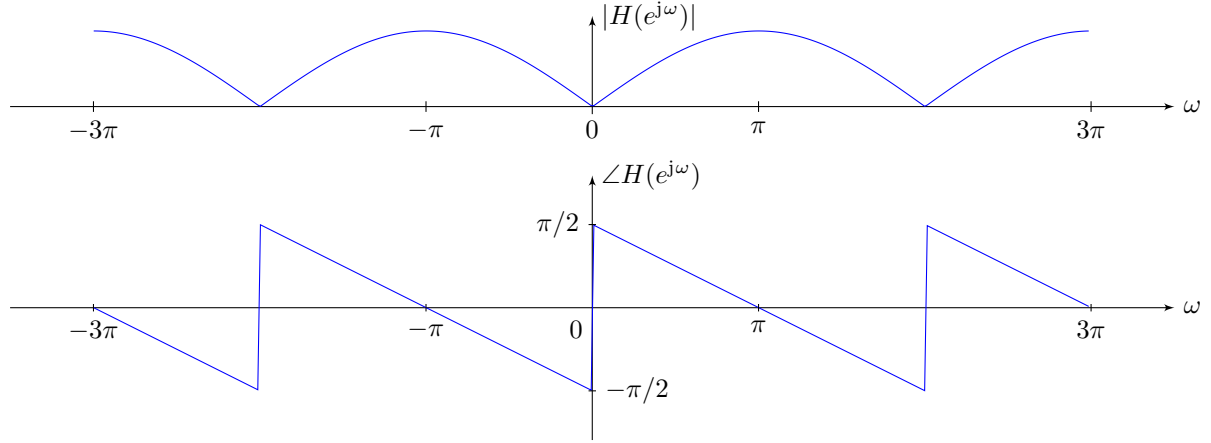


Figura 6.16: Diagrama de magnitude e de fase da função de resposta em frequência $H(e^{j\omega})$.

6.5 Espectro e Aliasing

O processo de amostragem pode ser representado matematicamente como um processo de modulação de impulsos como apresentado na Figura 6.17.

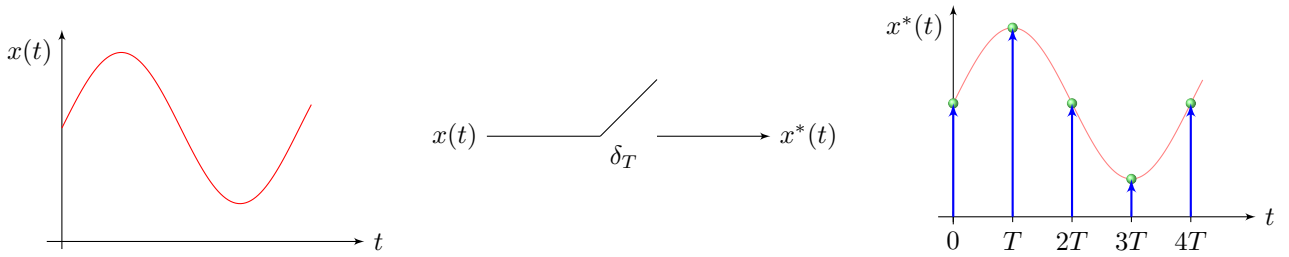


Figura 6.17: Processo de amostragem por modulação de impulsos.

O modulador ideal δ_T produz um trem de impulsos como apresentado na figura abaixo, em que $\delta(t - nT)$ é o impulso unitário aplicado no instante de tempo $t = nT$.

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

A saída desse modulador fornece o sinal amostrado $x^*(t)$, que representa um trem de impulsos ponderado (modulado) pela amplitude do sinal de entrada $x(t)$, ou seja,

$$(6.11) \quad x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - nT) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Claramente, o trem de impulsos $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ é uma função periódica, de período T , e como tal, pode ser expandida em série de Fourier, ou seja,

$$(6.12) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk(2\pi t/T)}$$

com os coeficientes da série de Fourier dados por

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-jk(2\pi t/T)} dt$$

Sabendo que no intervalo $[-T/2, T/2]$ a função pente se reduz a um único impulso em $t = 0$, ou seja,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \delta(t), \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

a integral se reduz a

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk(2\pi t/T)} dt = \frac{1}{T}$$

Substituindo X_k em (6.12), obtém-se

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk(2\pi t/T)}$$

Usando (6.11), o sinal amostrado $x^*(t)$ pode agora ser reescrito como

$$x^*(t) = x(t) \left(\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk(2\pi t/T)} \right)$$

Dessa forma, foi obtida uma representação analógica para um sinal amostrado (discreto).

Como o sinal $x^*(t)$ é contínuo, é possível calcular a sua transformada de Fourier, que nesse caso é dada por

$$\begin{aligned} X^*(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk(2\pi t/T)} \right) e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{jk(2\pi t/T)} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi t(f - k/T)} dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right) \end{aligned}$$

em que $X(f)$ é a transformada de Fourier de $x(t)$. Portanto, a transformada do sinal amostrado $x^*(t)$ é obtida como um trem de espectros em múltiplos de $f_a = 1/T$.

A Figura 6.18 apresenta os espectros de $X(f)$ e $X^*(f)$. Note que a magnitude do espectro de $X^*(f)$, na frequência $f = 1/(2T)$ recebe uma contribuição (alias) do espectro centrado em f_a . Assim, a magnitude de $X^*(f)$ depende das contribuições de magnitude dos demais espectros em $f_a + k/T$.

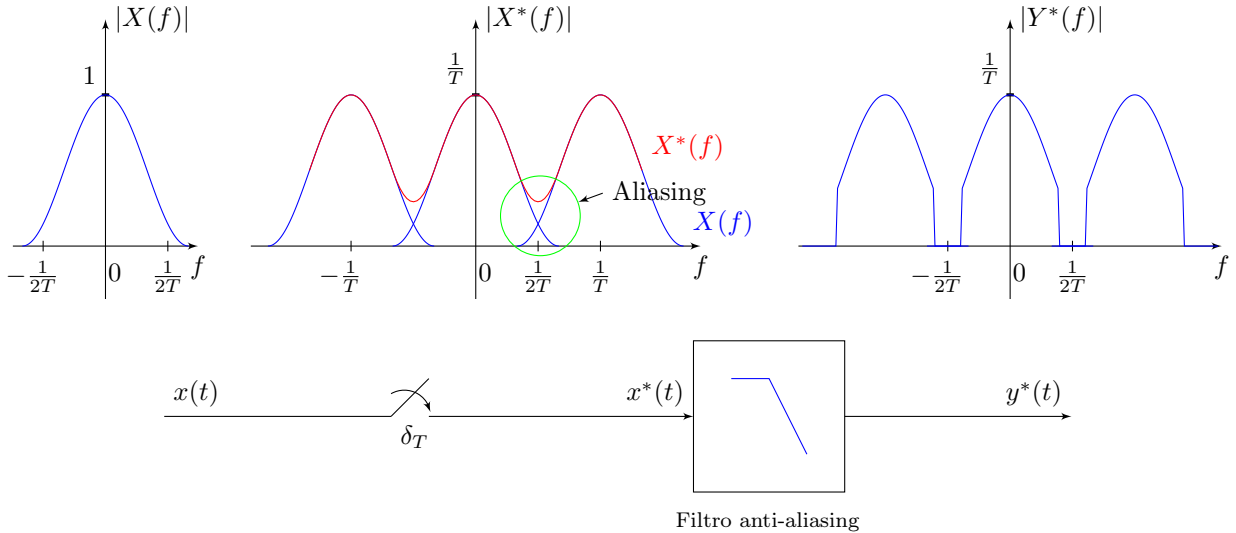


Figura 6.18: Espectro $X(f)$ do sinal $x(t)$, em azul, espectro $X^*(f)$ do sinal amostrado $x^*(t)$, em vermelho, e o efeito de aliasing que ocorre devido à periodicidade de $X^*(f)$.

Uma forma de atenuar o efeito do aliasing é processar o sinal $x(t)$ através de um filtro anti-aliasing (passa-baixo) com frequência de corte inferior a $1/(2T)$, produzindo um sinal $y^*(t)$ cujo espectro não possuirá componentes de frequência acima de $1/(2T)$, como apresentado na Figura 6.18.

Teorema 6.5.1 (Nyquist) Se $X(f) = 0$ para $|f| > 1/(2T)$, então é possível recuperar $X(f)$ (respectivamente $x(t)$) a partir de $X^*(f)$ se a frequência de amostragem $f_a = 1/T$ for no mínimo duas vezes maior do que a maior frequência contida no sinal $x(t)$.

6.5.1 Reconstrução do sinal contínuo

Se o teorema de Nyquist for satisfeito, é possível reconstruir o sinal $x(t)$ a partir do sinal amostrado $x(kT)$. Essa reconstrução é possível pois o espectro de $X(f)$ está contido na região de baixa frequência de $X^*(f)$. Assim, para recuperar $X(f)$, processa-se $X^*(f)$ através de um filtro ideal passa-baixa $L(f)$ (apresentado na Figura 6.19) com ganho T na faixa de frequência $-1/(2T) \leq f \leq 1/(2T)$.

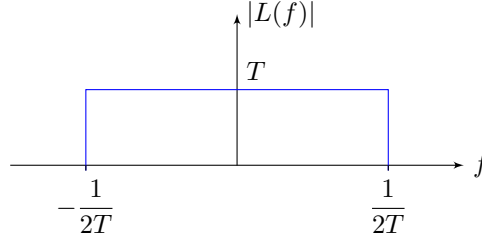


Figura 6.19: Magnitude $|L(f)|$ do espectro do filtro ideal (a fase de $L(f)$ é nula).

Usando esse filtro, o espectro de $X(f)$ é dado por $X(f) = L(f)X^*(f)$ e o sinal $x(t)$ pode em seguida ser determinado calculando-se a convolução $x(t) = l(t) * x^*(t)$, em que $x^*(t)$ é o sinal amostrado e $l(t)$ é a resposta ao impulso do filtro ideal $L(f)$. Para se determinar $l(t)$, basta calcular a transformada inversa de Fourier de $L(f)$, como segue:

$$\begin{aligned} l(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} L(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-1/(2T)}^{1/(2T)} T e^{j2\pi ft} df \\ &= \frac{T}{j2\pi t} \left[e^{j2\pi t/(2T)} - e^{-j2\pi t/(2T)} \right] = \frac{T}{\pi t} \sin(\pi t/T) = \text{sinc}(\pi t/T) \end{aligned}$$

em que a função sinc foi definida em (6.5).

A Figura 6.20 apresenta a resposta impulsiva $l(t)$ do filtro ideal $L(f)$. Note que o filtro ideal é não-causal, já que sua resposta impulsiva $l(t) \neq 0$ para $t < 0$.

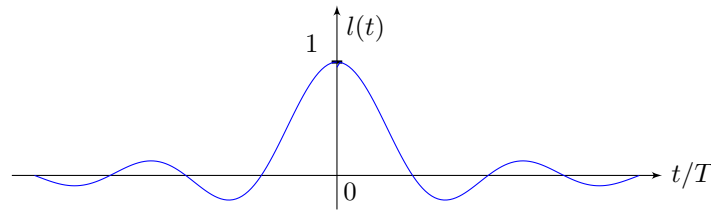


Figura 6.20: Resposta impulsiva do filtro ideal $L(f)$.

Para determinar o sinal $x(t)$, basta agora calcular a convolução $x(t) = l(t) * x^*(t)$, ou seja

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau) l(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT) \text{sinc}((t - \tau)\pi/T) d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \text{sinc}((t - \tau)\pi/T) \delta(\tau - kT) d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \text{sinc}((t - kT)\pi/T) \end{aligned}$$

Assim, o sinal $x(t)$ é reconstruído através da interpolação das amostras $x(kT)$ usando a função sinc, que, por ser proveniente do filtro $L(f)$, não contém componentes de frequência acima de $1/(2T)$.

Exemplo 6.5.1 Considere o sinal $x(t)$ dado por

$$x(t) = \sin(3\pi t) + \cos(\pi t/2)$$

A maior frequência desse sinal é 1.5Hz. Suponha que esse sinal seja amostrado com uma frequência de amostragem de 4Hz, que satisfaz o critério de Nyquist. A Figura 6.21 apresenta o sinal $x(t)$ e o respectivo sinal amostrado $x(k) := x(kT)$.

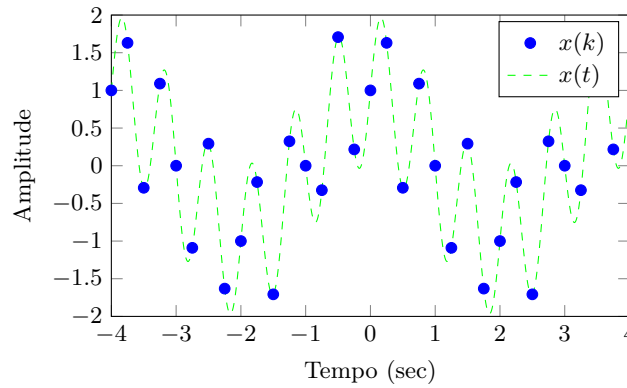


Figura 6.21: Sinal senoidal $x(t)$ e sua amostragem $x(k)$ obtida com uma frequência de amostragem de 4Hz.

Para verificar o efeito da interpolação baseada na função sinc, a aproximação $\hat{x}(t)$ dada por

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-N}^N x(kT) \text{sinc}((t - kT)\pi/T)$$

será calculada para alguns valores de N . A Figura 6.22 apresenta essa aproximação para os casos $N = 2, 10, 16$.

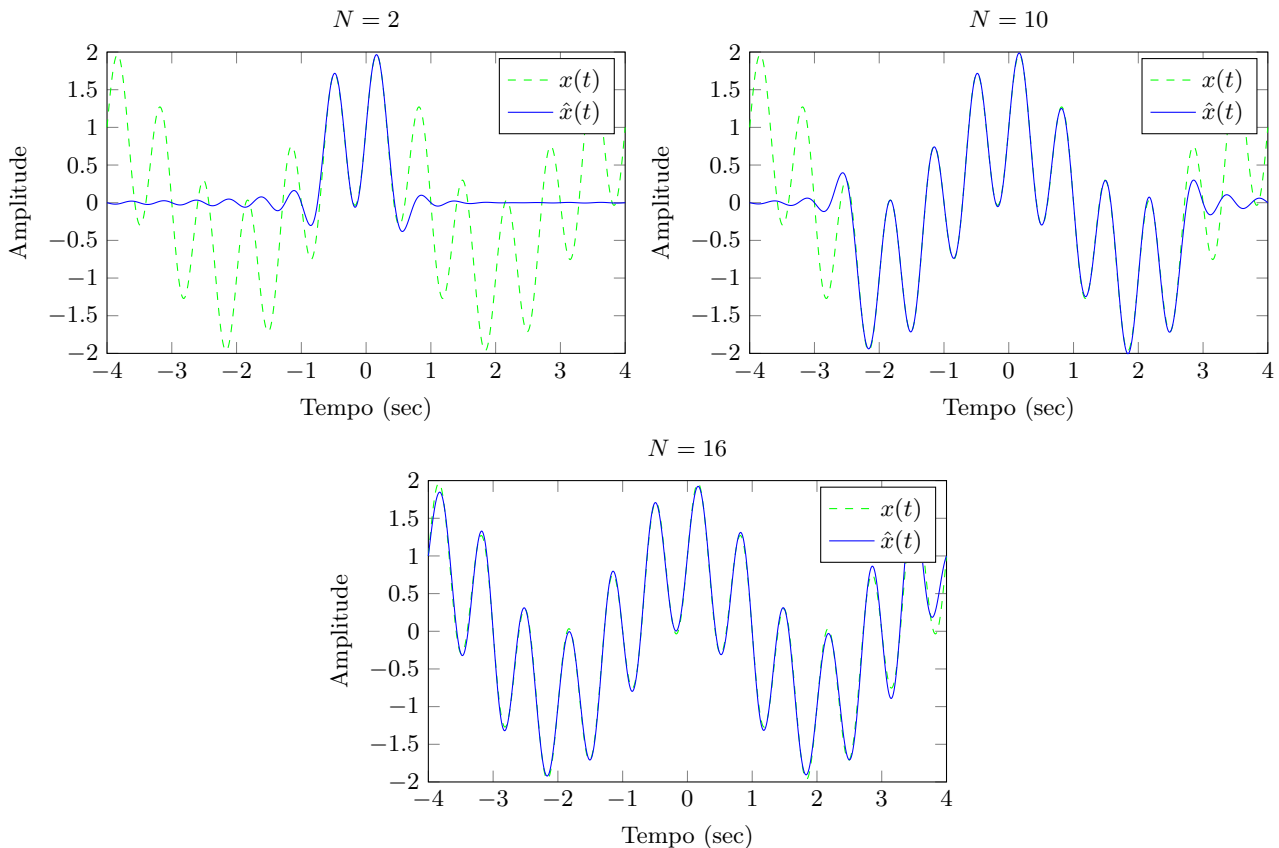


Figura 6.22: Sinal reconstruído $\hat{x}(t)$ usando diferentes ordens de aproximação ($N = 2, 10, 16$).

6.6 Exercício

Exercício 6.6.1 Sejam X_k e X_{-k} os coeficientes da série exponencial de Fourier, dada por (6.3). Mostre que $a_k = X_k + X_{-k}$ e $b_k = j(X_k - X_{-k})$, para $k \geq 0$.

Exercício 6.6.2 Calcule a série exponencial de Fourier da função trem de pulsos da Figura 6.23. Observe que nos pontos de descontinuidade a série fornecerá $A/2$.

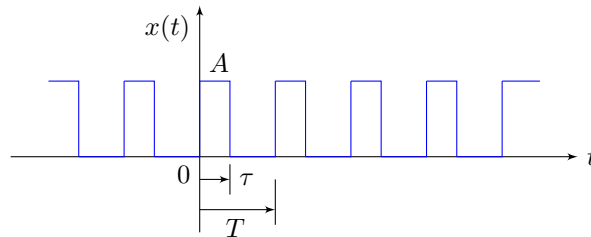


Figura 6.23: Trem de pulsos de amplitude A , período T e largura τ .

Exercício 6.6.3 Calcule a série exponencial de Fourier da função periódica trem de pulsos apresentada na Figura 6.24 e, em seguida, esboce o seu espectro de frequência.

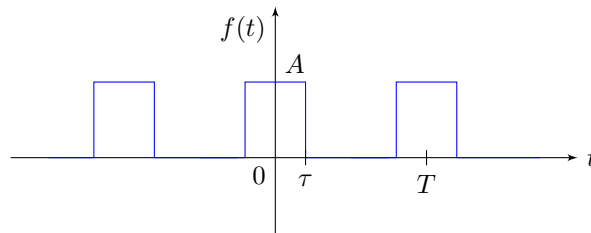


Figura 6.24: Função pulso periódica.

Exercício 6.6.4 Usando a expressão (6.4), calcule a série trigonométrica de Fourier da onda quadrada do Exemplo 6.1.1, reproduzida na Figura 6.25 abaixo por conveniência. Em seguida, usando a relação apresentada no Exercício 6.6.1, calcule os coeficientes X_k e X_{-k} da série exponencial de Fourier.

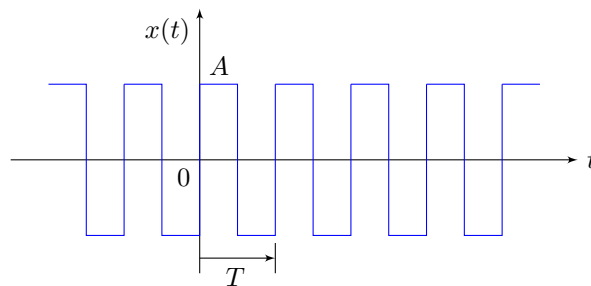


Figura 6.25: Onda quadrada de amplitude A e período T .

Exercício 6.6.5 Usando a série trigonométrica de Fourier para funções ímpares, calcule a série de Fourier da onda quadrada do Exercício 6.6.4.

Exercício 6.6.6 Usando a série trigonométrica de Fourier para funções pares, calcule a série de Fourier de $x(t - T/4)$, em que $x(t)$ é a onda quadrada do Exercício 6.6.4.

Exercício 6.6.7 Calcule a série exponencial de Fourier da função dente de serra da Figura 6.26. Em seguida expresse a solução na forma trigonométrica.

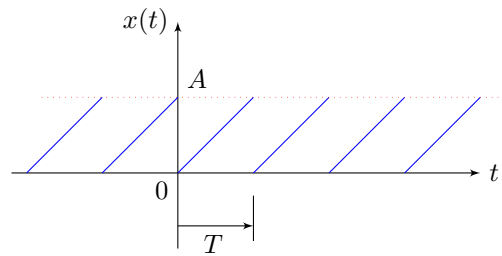


Figura 6.26: Função dente de serra de amplitude A e período T .

Exercício 6.6.8 Encontre a série trigonométrica de Fourier da função apresentada na Figura 6.27 abaixo. Dica: use a série de Fourier da função $g(t) = f(t) - 1/2$.

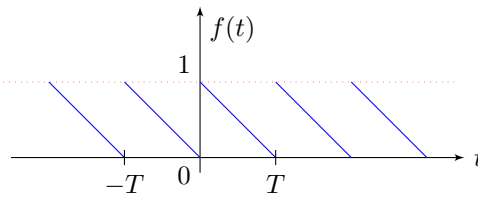


Figura 6.27: Função dente de serra periódica.

Exercício 6.6.9 Encontre a série trigonométrica de Fourier da função triangular periódica abaixo.

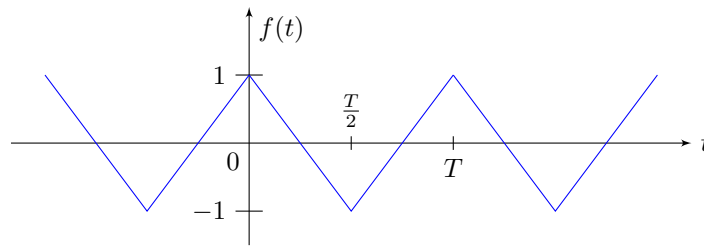


Figura 6.28: Função triangular periódica

Note que essa função pode ser descrita, no intervalo $[-T/2, T/2]$, por:

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{4t}{T} & , -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ 1 - \frac{4t}{T} & , 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

Exercício 6.6.10 Determine a série trigonométrica de Fourier da função triangular da Figura 6.29 abaixo. Use a extensão periódica ímpar.

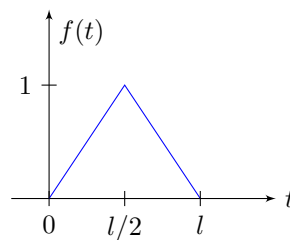


Figura 6.29: Função triangular.

Exercício 6.6.11 Repita o Exercício 6.6.10 anterior, usando a extensão periódica par.

Exercício 6.6.12 Gere o gráfico do espectro de frequência dos resultados dos itens anteriores.

Exercício 6.6.13 Determine a tensão $v_C(t)$ do circuito da Figura 6.30 abaixo para a entrada $v_E(t)$ dada pelo trem de pulsos do Exercício 6.6.3.

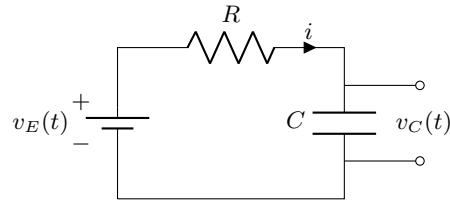


Figura 6.30: Circuito RC.

Exercício 6.6.14 Prove as propriedades abaixo, em que $F(f)$ denota a transformada de Fourier de $f(t)$.

1. Linearidade: $af(t) + bg(t) \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} aF(f) + bG(f)$
2. Convolução no tempo: $f(t) * g(t) \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} F(f)G(f)$
3. Convolução na frequência: $f(t)g(t) \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} F(f) * G(f)$
4. Conjugado: $\overline{f(t)} \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} \overline{F(-f)}$
5. Escala no tempo com $\alpha \in \mathbb{R}$: $f(\alpha t) \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|\alpha|} F(f/\alpha)$
6. Translação no tempo: $f(t - t_0) \xLeftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j2\pi f t_0} F(f)$
7. Teorema de Parseval: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(f)\overline{G(f)} df$
8. Teorema de Plancharel: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)|^2 df$

Exercício 6.6.15 Prove a seguinte expressão:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{\alpha f - f_0}{\beta}\right) X(f) df = |\beta/\alpha| X(f_0/\alpha), \quad \text{com } \alpha \neq 0 \text{ e } \beta \neq 0$$

Exercício 6.6.16 Prove a seguinte expressão:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$$

Exercício 6.6.17 Calcule a (pseudo) transformada de Fourier das seguintes funções:

1. $x(t) = 1$
2. $x(t) = \delta(t)$
3. $x(t) = e^{-j\alpha t}$, com $0 < \alpha \in \mathbb{R}$
4. $x(t) = e^{-\alpha t}$, com $0 < \alpha \in \mathbb{R}$
5. $x(t) = e^{-\alpha t}\mu(t)$, com $0 < \alpha \in \mathbb{R}$
6. $x(t) = e^{\alpha t}\mu(-t)$, com $0 < \alpha \in \mathbb{R}$
7. $x(t) = e^{-\alpha|t|}$, com $0 < \alpha \in \mathbb{R}$
8. $x(t) = \text{sinc}(\alpha\pi t)$, em que $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$
9. $x(t) = e^{-\alpha t^2}$, com $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ (função gaussiana)

Exercício 6.6.18 Determine a transformada de Fourier da função triangular da Figura 6.31.

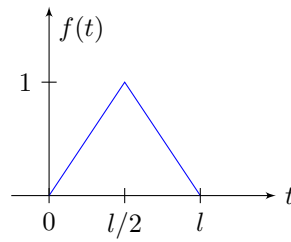


Figura 6.31: Função triangular.

Exercício 6.6.19 Determine a transformada de Fourier do pulso retangular da Figura 6.32.

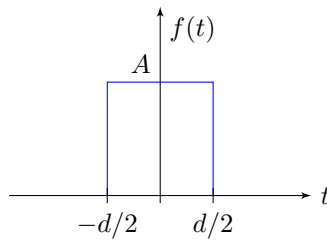


Figura 6.32: Função pulso retangular.

Exercício 6.6.20 Derive a FRF do sistema massa-mola-amortecedor cuja equação de movimento é dada por

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = x(t)$$

e mostre que o gráfico de magnitude e fase tem a forma da Figura 6.33.

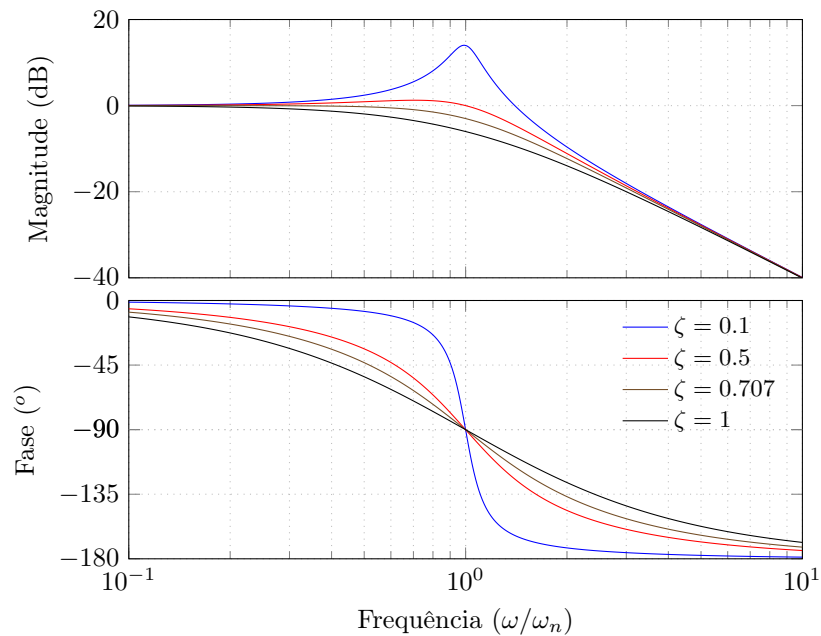


Figura 6.33: FRF do sistema massa-mola-amortecedor.

Exercício 6.6.21 Determine a FRF dos seguintes sistemas:

1. $\dot{y}(t) + 3y(t) = 7x(t)$
2. $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 5y(t) = 11x(t)$

3. $\ddot{y}(t) + 5y(t) = 3\dot{x}(t) + x(t)$

Exercício 6.6.22 Determine a FRF dos seguintes sistemas:

1. $y(k+1) - 3y(k) = 5x(k)$

2. $y(k+2) + 5y(k+1) + y(k) = 3x(k+1) - x(k)$

3. $y(k+2) = y(k+1) + y(k) + x(k)$

4. $y(k) = x(k) + x(k-2)$

Capítulo 7

Análise no Espaço de Estado

A representação no espaço de estado emerge como uma ferramenta fundamental para a análise de sistemas dinâmicos, proporcionando uma perspectiva algebricamente abrangente que transcende as técnicas tradicionais focadas na relação entrada-saída no domínio da frequência. Essa abordagem se destaca pela sua habilidade em captar integralmente o comportamento de um sistema dinâmico através do conceito de *estados*. As variáveis de estado descrevem o comportamento interno do sistema em qualquer instante, oferecendo uma base sólida para entender sua evolução temporal. Essas variáveis capturam a essência do sistema, enquanto as entradas e saídas são integradas para formar um panorama completo da dinâmica do sistema. Esta abordagem é particularmente vantajosa para análise de sistemas complexos, incluindo aqueles com múltiplas entradas e saídas. Seu uso encontra aplicação em uma vasta gama de campos da engenharia e das ciências aplicadas.

7.1 Representação no espaço de estado

Para ilustrar esse conceito, suponha um sistema composto de m equações diferenciais em m variáveis de ordem n . Tal sistema pode facilmente ser reescrito como um sistema de $m \times n$ equações de primeira ordem. Por exemplo, considere o sistema de $m = 2$ equações diferenciais de ordem $n = 2$, dado por

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \ddot{q}(t) + 5\dot{q}(t) + 3\dot{w}(t) &= u_1(t) \\ \ddot{w}(t) + 2\dot{w}(t) + 3\dot{q}(t) &= -u_2(t) \end{aligned}$$

Primeiramente, defina um novo conjunto de variáveis de estado $x(t)$ por

$$x_1(t) = q(t), \quad x_2(t) = \dot{q}(t), \quad x_3(t) = w(t), \quad x_4(t) = \dot{w}(t)$$

Note que a derivada do vetor $x(t)$ é

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{q}(t) = x_2(t), & \dot{x}_2(t) &= \ddot{q}(t) \\ \dot{x}_3(t) &= \dot{w}(t) = x_4(t), & \dot{x}_4(t) &= \ddot{w}(t) \end{aligned}$$

Substituindo o novo estado $x(t)$ na equação diferencial, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= -5x_1(t) - 3x_4(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_4(t) &= -3x_2(t) - 2x_4(t) - u_2(t) \end{aligned}$$

O sistema, na nova variável $x(t)$, passa a ser

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -5x_1(t) - 3x_4(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= -3x_2(t) - 2x_4(t) - u_2(t) \end{aligned}$$

que pode ainda ser reescrito na seguinte forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Assim, foi obtido o *modelo no espaço de estado*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

com as matrizes A e B dadas acima. Essa representação é largamente adotada em teoria de controle.

Uma vez definido o vetor de saída do sistema como uma combinação linear dos estados $x(t)$ e do sinal de entrada $u(t)$, ou seja,

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

o modelo no espaço de estado tem a forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de entradas, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor contendo as saídas, e as matrizes do sistema têm dimensões $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{p \times r}$.

Observação 7.1.1 *No exemplo anterior, é essencial frisar que, se a maior ordem da derivada da variável $w(t)$ fosse três, seriam necessários três estados para representá-la. Assim, o sistema completo necessitaria de cinco variáveis de estado: três para $w(t)$ e duas para $q(t)$. Dessa observação, infere-se que a quantidade total de variáveis de estado necessárias para representar um sistema de equações diferenciais corresponde à soma das ordens máximas das derivadas de cada variável envolvida.*

Exemplo 7.1.1 *Para representar no espaço de estado a equação do circuito RLC*

$$LC\ddot{v}_C(t) + RC\dot{v}_C(t) + v_C(t) = v_E(t)$$

basta definir as variáveis de estado como sendo

$$x_1 = v_C \quad e \quad x_2 = \dot{v}_C$$

Derivando-se x_1 e x_2 , obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{v}_C = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{v}_C = \frac{1}{LC}v_E - \frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 \end{aligned}$$

Definindo-se entrada $u(t)$ e saída $y(t)$ por

$$u = v_E(t) \quad e \quad y = v_C(t) = x_1(t)$$

chega-se à forma matricial no espaço de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/(LC) & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/(LC) \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 7.1.2 Considere o sistema carro-pêndulo da Figura 7.1, em que M é a massa do carro, l é o comprimento do pêndulo, m é a massa do pêndulo, $u(t)$ é uma força externa, k é a rigidez da mola, c é o coeficiente de amortecimento e g é a aceleração da gravidade.

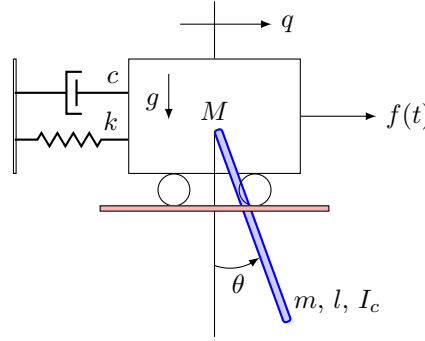


Figura 7.1: Sistema carro-pêndulo.

A equação de movimento desse sistema, linearizada, é dada por

$$\begin{aligned}\hat{M}\ddot{q}(t) - \frac{3}{4}mg\theta(t) + kq(t) + c\dot{q}(t) &= f(t) \\ \frac{2}{3}\hat{M}l\ddot{\theta}(t) + \bar{M}g\theta(t) - kq(t) - c\dot{q}(t) &= -f(t)\end{aligned}$$

com $\bar{M} = M + m$, $\hat{M} = M + m/4$ e $I_c = 1/12ml^2$. Escolhendo as variáveis de estado como

$$x_1 = q, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \dot{q}, \quad x_4 = \dot{\theta}$$

e a entrada $u(t)$ como $u(t) = f(t)$, obtém-se

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{q} = x_3, & \dot{x}_3 &= \ddot{q} = -\frac{k}{\hat{M}}x_1 + \frac{3mg}{4\hat{M}}x_2 - \frac{c}{\hat{M}}x_3 + \frac{1}{\hat{M}}u(t) \\ \dot{x}_2 &= \dot{\theta} = x_4, & \dot{x}_4 &= \ddot{\theta} = \frac{3k}{2\hat{M}l}x_1 - \frac{3\bar{M}g}{2\hat{M}l}x_2 + \frac{3c}{2\hat{M}l}x_3 - \frac{3}{2\hat{M}l}u(t)\end{aligned}$$

Na forma matricial, tem-se

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{\hat{M}} & \frac{3mg}{4\hat{M}} & -\frac{c}{\hat{M}} & 0 \\ \frac{3k}{2\hat{M}l} & -\frac{3\bar{M}g}{2\hat{M}l} & \frac{3c}{2\hat{M}l} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{\hat{M}l} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Suponha que a saída desejada seja o deslocamento do carro $q(t)$ e a velocidade angular $\dot{\theta}(t)$. Então o vetor de saída $y(t)$ passa a ser

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

ou seja, as matrizes C e D serão

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 7.1.3 Considere o sistema mecânico de três graus de liberdade levantado na Seção 2.2.5. A equação de movimento desse sistema foi determinada como sendo

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = 0$$

em que $q = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ é o vetor contendo o deslocamento das massas m_1 , m_2 e m_3 , M é a matriz de massa, C a matriz de amortecimento e K a matriz de rigidez. É possível representar essa equação numa forma ainda mais compacta (no espaço de estado). Para obter essa representação, basta definir o estado x como

$$x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

Assim, a sua derivada é dada por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}C\dot{q} - M^{-1}Kq \end{bmatrix}$$

que pode ser equivalentemente escrito como

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

com a matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$$

Supondo agora que a saída $y(t)$ desejada seja o vetor de velocidade $\dot{q}(t)$ das três masas, tem-se

$$y(t) = Cx(t), \quad C = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$$

Assim, o sistema no espaço de estado fica sendo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

Dada uma condição inicial x_0 , será possível determinar sua solução homogênea, como será visto na Seção 7.2.

7.1.1 Desacoplamento

Em certas situações, é necessário “desacoplar” o sistema de equações diferenciais para representá-lo adequadamente no espaço de estado. Considere, por exemplo, o sistema descrito pelas seguintes equações

$$(7.2) \quad \ddot{q}(t) + \ddot{w}(t) - \dot{w}(t) = u(t)$$

$$(7.3) \quad \ddot{q}(t) - \ddot{w}(t) + q(t) = u(t)$$

Note que esse sistema de equações é de segunda ordem nas variáveis $q(t)$ e $w(t)$, e que tanto $\ddot{q}(t)$ como $\ddot{w}(t)$ aparecem numa mesma equação. Por essa razão, a representação direta desse sistema no espaço de estado não é possível. Contudo, é possível efetuar um desacoplamento de maneira que cada equação inclua apenas a derivada de maior ordem de uma única variável.

Tal procedimento consiste em isolar o termo $\ddot{q}(t)$ da primeira equação e substituí-lo na segunda equação. Em seguida, faz-se o processo similar com $\ddot{w}(t)$, ou seja, isola-se o termo $\ddot{w}(t)$ da segunda equação e o substitui na primeira equação, como segue:

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) &= -\ddot{w}(t) + \dot{w}(t) + u(t) && \xrightarrow{\text{substituindo em (7.3)}} && -\ddot{w}(t) + \dot{w}(t) + u(t) - \ddot{w}(t) + q(t) = u(t) \\ \ddot{w}(t) &= \ddot{q}(t) + q(t) - u(t) && \xrightarrow{\text{substituindo em (7.2)}} && \ddot{q}(t) + \ddot{q}(t) + q(t) - u(t) - \dot{w}(t) = u(t) \end{aligned}$$

fornecendo finalmente o sistema “desacoplado” na forma

$$(7.4) \quad \begin{aligned} 2\ddot{q}(t) + q(t) - \dot{w}(t) &= 2u(t) \\ -2\ddot{w}(t) + \dot{w}(t) + q(t) &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \ddot{q}(t) &= \frac{1}{2}(\dot{w}(t) - q(t)) + u(t) \\ \ddot{w}(t) &= \frac{1}{2}(\dot{w}(t) + q(t)) \end{aligned}$$

É importante enfatizar que a ordem na escolha da equação ou da variável a ser inicialmente isolada é irrelevante. No mais, é oportuno perceber que este processo de desacoplamento pode ser realizado de forma bastante simples reescrevendo o sistema de equações (7.2)-(7.3) na forma matricial como segue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}(t) \\ \ddot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) + \dot{w}(t) \\ u(t) - q(t) \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \ddot{q}(t) \\ \ddot{w}(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) + \dot{w}(t) \\ u(t) - q(t) \end{bmatrix}$$

que é exatamente o mesmo sistema de equações obtido acima em (7.4).

7.2 Solução homogênea da equação no espaço de estado

Considere o seguinte modelo no espaço de estado, que representa uma equação diferencial (matricial) linear de primeira ordem homogênea:

$$(7.5) \quad \dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0$$

com a matriz A e o vetor de variáveis de estado x tendo dimensões $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $x \in \mathbb{R}^n$, respectivamente. A solução¹ homogênea dessa equação diferencial é dada por

$$(7.6) \quad x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$$

em que a matriz $\Phi(t, t_0)$, também conhecida como **matriz de transição de estado**, possui a seguinte expansão em série

$$\Phi(t, t_0) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A^{\ell}(t-t_0)^{\ell}}{\ell!}$$

Prova. Uma demonstração dessa expressão pode ser obtida assumindo-se que a solução $x(t)$ de (7.5), com condição inicial no instante t_0 (não necessariamente nulo), ou seja $x(t_0) = x_0$, tem a seguinte expansão em série:

$$(7.7) \quad x(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} z_{\ell}(t-t_0)^{\ell} = z_0 + z_1(t-t_0) + z_2(t-t_0)^2 + z_3(t-t_0)^3 + \dots$$

com $z_i(t) \in \mathbb{R}^n$. Assim, em $t = t_0$, tem-se

$$x(t_0) = z_0 = x_0$$

Derivando-se a solução (7.7) em relação a t , tem-se

$$\dot{x}(t) = z_1 + 2z_2(t-t_0) + 3z_3(t-t_0)^2 + \dots = Ax(t)$$

Assim, em $t = t_0$, tem-se

$$\dot{x}(t_0) = z_1 = Ax_0$$

Derivando-se novamente a solução $x(t)$ em relação a t , tem-se

$$\ddot{x}(t) = 2z_2 + 6z_3(t-t_0) + \dots = A\dot{x}(t) = A^2x(t)$$

Assim, em $t = t_0$, tem-se

$$z_2 = \frac{A^2}{2}x_0$$

Prosseguindo com as derivadas subsequentes, percebe-se que

$$z_{\ell} = \frac{A^{\ell}}{\ell!}x_0$$

Portanto, a solução da equação homogênea (7.5) é dada por

$$x(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} z_{\ell}(t-t_0)^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A^{\ell}(t-t_0)^{\ell}}{\ell!}x_0$$

¹O Apêndice A.3 apresenta alguns conceitos fundamentais sobre equações diferenciais lineares homogêneas no espaço de estado.

que pode ser reescrita na *forma mais usual* como

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$$

com a matriz de transição de estado (ou **matriz exponencial**) $e^{A(t-t_0)}$ dada por

$$e^{A(t-t_0)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A^{\ell}(t-t_0)^{\ell}}{\ell!}$$

■

Observação 7.2.1 Para um sistema linear invariante no tempo, pode-se assumir sem perda de generalidade que a condição inicial ocorre no tempo $t_0 = 0$. Assim, a matriz de transição de estado fica sendo e^{At} .

7.2.1 Propriedades da matriz de transição de estado

Sejam $t_i \in \mathbb{R}$, X e Y matrizes no $\mathbb{R}^{n \times n}$, I a matriz identidade $n \times n$ e 0 a matriz nula $n \times n$. Algumas propriedades importante da matriz de transição de estado são:

1. $e^0 = I$
2. $\frac{de^{Xt}}{dt} = Xe^{Xt} = e^{Xt}X$
3. $e^{X(t_1+t_2)} = e^{Xt_1}e^{Xt_2}$
4. $(e^X)^{-1} = e^{-X}$
5. $e^{X^T} = (e^X)^T$
6. Se $YX = XY$ (comutam), então $e^Ye^X = e^Xe^Y = e^{Y+X}$. Em geral, $e^Ye^X \neq e^Xe^Y \neq e^{Y+X}$
7. Se $|Y| \neq 0$, então $e^{YXY^{-1}} = Ye^XY^{-1}$
8. Se $X = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ for uma matriz diagonal, então $e^X = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n})$

Como descrito na propriedade 2, a derivada da matriz de transição de estado e^{At} se comporta de forma similar ao caso escalar, ou seja, a seguinte relação é válida:

$$\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At} = e^{At}A$$

Assim, fica fácil provar que a expressão (7.6) de fato é uma solução de (7.5), já que derivando (7.6), tem-se

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{de^{At}x_0}{dt} = \frac{de^{At}}{dt}x_0 = Ae^{At}x_0 = Ax(t) \quad \implies \quad \dot{x}(t) = Ax(t)$$

Uma outra propriedade importante da matriz de transição de estado é obtida notando que

$$x(t_1) = e^{A(t_1-t_0)}x(t_0) \quad \text{e} \quad x(t_2) = e^{A(t_2-t_0)}x(t_0)$$

Assim, como t_0 é arbitrário, fazendo-se $t_0 = t_1$, tem-se

$$x(t_2) = e^{A(t_2-t_1)}x(t_1) = e^{A(t_2-t_1)}e^{A(t_1-t_0)}x(t_0)$$

Donde conclui-se que

$$(7.8) \quad e^{A(t_2-t_0)} = e^{A(t_2-t_1)}e^{A(t_1-t_0)}$$

Portanto, a matriz $e^{A(t_1-t_0)}$ faz a transição de $x(t_0)$ a $x(t_1)$ e a matriz $e^{A(t_2-t_1)}$ faz a transição de $x(t_1)$ a $x(t_2)$. No mais, fazendo-se $t_2 = t_0$ em (7.8), tem-se

$$I = e^{A(t_0-t_1)}e^{A(t_1-t_0)} = e^{-A(t_1-t_0)}e^{A(t_1-t_0)}$$

Portanto, a inversa (já descrita na propriedade 4 acima) é dada por

$$\left[e^{A(t_1-t_0)} \right]^{-1} = e^{-A(t_1-t_0)}$$

7.2.2 Cálculo da matriz de transição de estado

A matriz de transição de estado e^{At} , com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pode ser calculada de forma simples usando-se um dos seguintes métodos:

1. $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$, com \mathcal{L} denotando a transformada de Laplace. Para provar essa expressão, note que

$$\mathcal{L}\left[\frac{de^{At}}{dt}\right] = \mathcal{L}[e^{At}A] = \mathcal{L}[e^{At}]A$$

Por outro lado, da propriedade da transformada de Laplace da derivada de uma função, tem-se

$$\mathcal{L}\left[\frac{de^{At}}{dt}\right] = s\mathcal{L}[e^{At}] - e^{At}\Big|_{t=0} = s\mathcal{L}[e^{At}] - I$$

Igualando essas duas expressões, obtém-se finalmente

$$\mathcal{L}[e^{At}]A = s\mathcal{L}[e^{At}] - I \iff \mathcal{L}[e^{At}](sI - A) = I$$

Portanto,

$$\mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1} \iff e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

2. $e^{At} = \Sigma e^{\Lambda t} \Sigma^{-1}$, usando a forma diagonal $A = \Sigma \Lambda \Sigma^{-1}$. Essa fórmula é obtida diretamente da propriedade 8 da matriz de transição de estado, apresentada na Seção 7.2.1. Note que a forma diagonal $A = \Sigma \Lambda \Sigma^{-1}$ é obtida através da decomposição em autovalores e autovetores da matriz A , como apresentado no Apêndice A.4. O método assume que a matriz de autovetores Σ é inversível, o que nem sempre é o caso.

3. $e^{At} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_{\ell}(t) A^{\ell}$, usando o método polinomial. Para esse método, os coeficientes $\alpha_{\ell}(t)$ são obtidos da expressão $\sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_{\ell} \lambda_i^{\ell} = e^{\lambda_i t}$, com $i = 1, \dots, n$, ou seja, do seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

em que λ_i são os autovalores da matriz A . A matriz acima (contendo os termos $1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^{n-1}$) é conhecida como matriz de Vandermonde. Essa matriz só será inversível se todos os autovalores λ_i da matriz A forem distintos. Uma derivação do método polinomial encontra-se no Apêndice A.4.

Exemplo 7.2.1 Calcule e^{At} para a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

1. Usando a transformada de Laplace, ou seja, usando a expressão $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$:

As matrizes $(sI - A)$ e $(sI - A)^{-1}$ são respectivamente dadas por

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}, \quad (sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \begin{bmatrix} (s+4) & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}$$

Assim, a transformada inversa fornece

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 3(e^{-3t} - e^{-t}) & 3e^{-3t} - e^{-t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

2. Usando a forma diagonal, ou seja, usando a expressão $e^{At} = \Sigma e^{\Lambda t} \Sigma^{-1}$:

Os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -3$. Assim, a matriz diagonal Λ , contendo os autovalores, é dada por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Os autovetores, associados aos autovalores λ_1 e λ_2 são respectivamente $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Portanto,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Sigma^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, tem-se que e^{At} é dada por

$$\begin{aligned} e^{At} &= \Sigma e^{\Lambda t} \Sigma^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 3(e^{-3t} - e^{-t}) & 3e^{-3t} - e^{-t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

3. Usando o método polinomial, ou seja, usando a expressão $e^{At} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell(t) A^\ell$:

O sistema de equações necessário para determinar os coeficientes $\alpha_\ell(t)$ é dado por

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2} (3e^{-t} - e^{-3t}) \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2} (e^{-t} - e^{-3t}) \end{aligned}$$

Portanto, a matriz de transição de estado é dada por

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 3(e^{-3t} - e^{-t}) & 3e^{-3t} - e^{-t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

Exemplo 7.2.2 Calcule a resposta do sistema

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t), \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x(t)$$

para a condição inicial $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$. Do Exemplo 7.2.1 anterior, sabe-se que

$$e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 3(e^{-3t} - e^{-t}) & 3e^{-3t} - e^{-t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

Assim,

$$x(t) = e^{At} x_0 = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0$$

7.3 Solução da equação no espaço de estado não homogênea

Considere o sistema

$$(7.9) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Assuma que a solução tem a forma

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}v(t)$$

com $v(t)$ a determinar. Substituindo na equação de estado, tem-se

$$Ae^{A(t-t_0)}v(t) + e^{A(t-t_0)}\dot{v}(t) = Ae^{A(t-t_0)}v(t) + Bu(t)$$

como $[e^{A(t-t_0)}]^{-1} = e^{-A(t-t_0)}$, obtém-se

$$\dot{v}(t) = e^{-A(t-t_0)}Bu(t)$$

Considerando $u(t) = 0$ para $t < t_0$ e integrando, obtém-se

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-A(\tau-t_0)}Bu(\tau) d\tau$$

Notando que $x(t_0) = x_0 = v(t_0)$, tem-se

$$(7.10) \quad x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0$$

Portanto, a saída $y(t)$ fica sendo

$$(7.11) \quad y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau + Du(t), \quad t \geq t_0$$

Exemplo 7.3.1 Para o sistema (7.9) com as matrizes A , B , C e D dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = 1,$$

calcule a saída $y(t)$ para a entrada em degrau $u(t) = \mu(t)$ e condição inicial $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$. Do Exemplo 7.2.2, foi visto que a solução homogênea é dada por $Ce^{At}x_0 = 0$. Assim, resta calcular a resposta forçada dada por

$$\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau = C \left(\int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau \right) B = C \begin{bmatrix} \frac{1}{6} (8 + e^{-3t} - 9e^{-t}) & \frac{1}{6} (2 + e^{-3t} - 3e^{-t}) \\ -1 - \frac{e^{-3t}}{2} + \frac{3e^{-t}}{2} & \frac{1}{2} e^{-3t} (-1 + e^{2t}) \end{bmatrix} B = e^{-3t} - 1$$

Portanto, a saída $y(t)$ é dada por

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau + Du(t) = e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

7.3.1 Resposta ao impulso e função de transferência

A resposta ao impulso $h(t)$ do sistema (7.9) é obtida diretamente da formula acima (7.11), com condições iniciais nulas, $x_0 = 0$, para uma entrada impulsiva $u(t) = \delta(t)$ aplicada no instante de tempo $t_0 = 0$. Assim, usando a propriedade do delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) dt = f(0)$$

obtém-se

$$h(t) = Ce^{At}B + D\delta(t), \quad t \geq 0$$

Esse mesmo resultado pode ser obtido aplicando-se a transformada de Laplace em

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

com condições iniciais nulas, ou seja

$$\begin{aligned} (sI - A)X(s) &= BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

que fornece a função de transferência $H(s)$ dada por

$$(7.12) \quad Y(s) = H(s)U(s), \quad H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Claramente, a resposta ao impulso $h(t)$ é dada por

$$h(t) = C\mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]B + D\delta(t) = Ce^{At}B + D\delta(t), \quad t \geq 0$$

Observação 7.3.1 A resposta completa do sistema $y(t)$, descrita por (7.11), é a soma da resposta homogênea:

$$y_h = Ce^{A(t-t_0)}x_0, \quad t \geq t_0$$

com a resposta forçada, dada pela convolução da resposta ao impulso $h(t)$ com a entrada $u(t)$:

$$y_f = h(t) * u(t) = \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau + Du(t), \quad t \geq t_0$$

Lembrando que a transformada de Laplace da convolução $y(t) = h(t) * u(t)$ nada mais é do que o produto na frequência, ou seja $Y(s) = H(s)U(s)$, obtém-se diretamente a expressão (7.12). A representação por diagrama de blocos da relação entrada-saída encontra-se na Figura 7.2 abaixo.

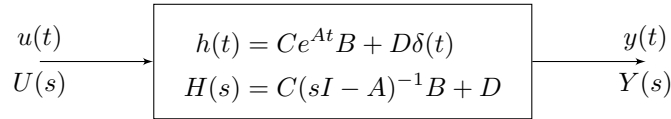


Figura 7.2: Relação entrada-saída no domínio do tempo e da frequência.

7.4 Representação no espaço de estado: caso discreto

Antes de apresentar a solução da equação de diferenças no espaço de estado, é demonstrado através de um exemplo que um sistema de m equações de diferenças de ordem n pode ser reescrito como um sistema de $m \times n$ equações de primeira ordem definindo-se variáveis de estado, de forma análoga ao que foi realizado no caso contínuo. Considere, por exemplo, a seguinte equação de diferenças:

$$\begin{aligned} q(k+2) + 5q(k) + 3w(k+1) &= u_1(k) \\ w(k+2) + 2w(k+1) + 3q(k+1) &= -u_2(k) \end{aligned}$$

para $k \geq 0$ e condições iniciais $w(0) = w_0$, $w(1) = w_1$, $q(0) = q_0$ e $q(1) = q_1$. Primeiramente, define-se um novo conjunto de variáveis de estado $x(k)$ por

$$x_1(k) = q(k), \quad x_2(k) = q(k+1), \quad x_3(k) = w(k), \quad x_4(k) = w(k+1)$$

Note que o vetor $x(k+1)$ é dado por

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= q(k+1) = x_2(k), & x_2(k+1) &= q(k+2) \\ x_3(k+1) &= w(k+1) = x_4(k), & x_4(k+1) &= w(k+2) \end{aligned}$$

Substituindo o novo estado $x(k)$ na equação acima, tem-se

$$\begin{aligned} x_2(k+1) &= -5x_1(k) - 3x_4(k) + u_1(k) \\ x_4(k+1) &= -3x_2(k) - 2x_4(k) - u_2(k) \end{aligned}$$

O sistema, na nova variável $x(k)$, passa a ser

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= -5x_1(k) - 3x_4(k) + u_1(k) \\ x_3(k+1) &= x_4(k) \\ x_4(k+1) &= -3x_2(k) - 2x_4(k) - u_2(k) \end{aligned}$$

que pode ainda ser reescrito na seguinte forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

Assim, foi obtido o *modelo no espaço de estado*

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k \geq 0$$

com as matrizes A e B dadas acima e condições iniciais $x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & w_0 & w_1 \end{bmatrix}^T$.

7.4.1 Desacoplamento

Quando as equações de diferenças estão acopladas, o processo de desacoplamento é realizado de maneira similar ao caso contínuo. Considere, por exemplo, a seguinte equação de diferenças:

$$\begin{aligned} q(k+2) + w(k+2) - w(k+1) &= u(k) \\ q(k+2) - w(k+2) + q(k) &= u(k) \end{aligned}$$

Essa equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 2q(k+2) + q(k) - w(k+1) &= 2u(k) \\ 2w(k+2) - w(k+1) - q(k) &= 0 \end{aligned}$$

7.4.2 Solução homogênea

Considere agora a equação homogênea, dada por

$$(7.13) \quad x(k+1) = Ax(k), \quad k \geq 0$$

com condição inicial $x(0) = x_0$. A **solução homogênea**, obtida diretamente por recursão, é dada por

$$x(k) = A^k x_0, \quad k \geq 0$$

que claramente satisfaz (7.13), já que

$$x(k+1) = A^{k+1} x_0 = AA^k x_0 = Ax(k)$$

É possível mostrar (ver Exercício 7.11.23) que a solução para a condição inicial $x(k_0) = x_0$, num tempo k_0 não necessariamente nulo, é dada por

$$x(k) = \Phi(k, k_0)x_0, \quad k \geq k_0, \quad \Phi(k, k_0) = A^{k-k_0}$$

em que a matriz $\Phi(k, k_0)$ é conhecida como **matriz de transição de estado** (discreta). Essa matriz possui claramente as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \Phi(k, k) &= I, & k &\geq k_0 \\ \Phi(k+1, k_0) &= A\Phi(k, k_0), & k &\geq k_0 \\ \Phi(k, k_0) &= \Phi(k, k_1)\Phi(k_1, k_0), & k &\geq k_1 \geq k_0 \end{aligned}$$

Note que a matriz de transição de estado se reduz a A^k se $k_0 = 0$. É importante enfatizar que ao contrário do caso contínuo, a matriz de transição de estado discreta pode não ser inversível, já que a matriz A pode ser singular.

A transformada \mathcal{Z} da matriz de transição de estado A^k pode ser obtida como segue. Aplicando a transformada \mathcal{Z} em (7.13), tem-se

$$zX(z) - zx(0) = AX(z)$$

Assim,

$$X(z) = (zI - A)^{-1}zx(0)$$

cujas transformada inversa fornece

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1} [z(zI - A)^{-1}] x(0), \quad k \geq 0$$

Comparando com a solução da homogênea dada por

$$x(k) = A^k x(0), \quad k \geq 0$$

conclui-se que

$$A^k \mu(k) = \mathcal{Z}^{-1} [z(zI - A)^{-1}]$$

Portanto, tem-se

$$(7.14) \quad \mathcal{Z} [A^k \mu(k)] = z(zI - A)^{-1}$$

Observação 7.4.1 *Perceba a similaridade com o caso escalar*

$$\mathcal{Z}[a^k \mu(k)] = \frac{z}{z - a} = z(z - a)^{-1}$$

7.4.3 Solução não homogênea

A solução completa do sistema discreto no espaço de estado

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k \geq 0$$

para uma entrada $u(k)$ qualquer e condição inicial $x(0)$ é dada por

$$(7.15) \quad x(k) = A^k x(0) + \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l-1} Bu(l), \quad k \geq 0$$

Pode-se facilmente provar essa fórmula por indução, como segue:

1. Para $k = 0$, a solução² claramente satisfaz a condição inicial;
2. Considere que a solução é válida para um $k \geq 0$ qualquer, assim, tem-se

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A^{k+1}x(0) + \sum_{l=0}^k A^{k-l}Bu(l) \\ &= AA^kx(0) + \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l}Bu(l) + Bu(k) \\ &= A \left[A^kx(0) + \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l-1}Bu(l) \right] + Bu(k) \end{aligned}$$

Usando agora (7.15), tem-se finalmente

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

²Para $k = 0$, a somatória se reduz a $\sum_{l=0}^{-1} A^{-l-1}Bu(l)$. Dado que o limite superior é menor que o limite inferior, convencionalmente considera-se essa soma como zero.

A expressão acima (7.15) é uma solução de estado, pois não considera a saída do sistema. Definindo a saída do sistema por

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

tem-se

$$(7.16) \quad y(k) = Cx(k) + Du(k) = CA^k x(0) + \sum_{l=0}^{k-1} CA^{k-l-1} Bu(l) + Du(k), \quad k \geq 0$$

Observação 7.4.2 Perceba que a solução (7.16) obtida acima é composta de uma componente homogênea

$$y_h(k) = CA^k x(0)$$

e de uma resposta forçada

$$y_f(k) = \sum_{l=0}^{k-1} CA^{k-l-1} Bu(l) + Du(k)$$

É possível mostrar (ver Exercício 7.11.20) que a solução forçada $y_f(k)$ é dada pela convolução da resposta ao impulso $h(k)$ com a entrada $u(k)$.

7.4.4 Resposta ao impulso e função de transferência

Para obter a resposta ao impulso $h(k)$, basta fazer $u(k) = \delta(k)$ na equação (7.16) acima, com condições iniciais nulas. Assim, a resposta ao impulso é dada por

$$h(k) = \begin{cases} D & , \text{ se } k = 0 \\ CA^{k-1}B & , \text{ se } k \geq 1 \end{cases}$$

que pode ainda ser reescrita como

$$(7.17) \quad h(k) = CA^{k-1}B\mu(k-1) + D\delta(k)$$

Os termos CA^nB , para $n \geq 0$, são conhecidos como parâmetros de Markov do modelo no espaço de estado. Esses parâmetros são amplamente utilizados na área de identificação de sistemas dinâmicos.

A função de transferência $H(z)$ é obtida aplicando-se a transformada \mathcal{Z} na resposta ao impulso $h(k)$ dada por (7.17). Primeiramente, perceba da expressão (7.14) que

$$\mathcal{Z}[A^{k-1}\mu(k-1)] = (zI - A)^{-1}$$

Assim, tem-se

$$H(z) = \mathcal{Z}[h(k)] = C(zI - A)^{-1}B + D$$

Esse mesmo resultado pode ainda ser obtido aplicando-se a transformada \mathcal{Z} em

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

com condições iniciais nulas, ou seja

$$\begin{aligned} (zI - A)X(z) &= BU(z) \\ Y(z) &= CX(z) + DU(z) \end{aligned}$$

que resulta na função de transferência $H(z)$ dada por

$$Y(z) = H(z)U(z), \quad \text{com} \quad H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

7.4.5 Cálculo da matriz de transição de estado

O cálculo de A^k pode ser realizado pelos seguintes métodos:

1. $A^k = \mathcal{Z}^{-1} [(zI - A)^{-1} z]$. Essa expressão foi derivada na seção anterior.
2. $A^k = \Sigma \Lambda^k \Sigma^{-1}$, usando a forma³ diagonal $A = \Sigma \Lambda \Sigma^{-1}$.
3. $A^k = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_{\ell}(k) A^{\ell}$, usando o método polinomial. Os coeficientes $\alpha_{\ell}(k)$ são obtidos do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(k) \\ \alpha_1(k) \\ \alpha_2(k) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^k \\ \lambda_2^k \\ \lambda_3^k \\ \vdots \\ \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Exemplo 7.4.1 Calcule A^k para $k = 10$ com a matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

1. Usando a forma diagonal, ou seja, usando a expressão $A^k = \Sigma \Lambda^k \Sigma^{-1}$:

A matriz de autovalores Λ e a matriz de autovetores Σ já foram calculadas no Exemplo 7.2.1. Assim, tem-se

$$\begin{aligned} A^k &= \Sigma \Lambda^k \Sigma^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-3)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(-3)^k + 3(-1)^k & -(-3)^k + (-1)^k \\ 3(-3)^k - 3(-1)^k & -(-1)^k + 3(-3)^k \end{bmatrix}, \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

Agora, basta calcular a expressão para $k = 10$, fornecendo

$$A^{10} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 59049 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29523 & -29524 \\ 88572 & 88573 \end{bmatrix}$$

2. Usando a transformada \mathcal{Z} , ou seja, usando a expressão $A^k = \mathcal{Z}^{-1} [(zI - A)^{-1} z]$, para $k \geq 0$:

Aplicando a inversa da transformada \mathcal{Z} na expressão

$$(zI - A)^{-1} z = \frac{1}{z^2 + 4z + 3} \begin{bmatrix} z(z+4) & z \\ -3z & z^2 \end{bmatrix}$$

obtem-se

$$A^k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(-3)^k + 3(-1)^k & -(-3)^k + (-1)^k \\ 3(-3)^k - 3(-1)^k & -(-1)^k + 3(-3)^k \end{bmatrix}, \quad k \geq 0$$

Note que essa é a mesma expressão obtida no item anterior.

3. Usando o método polinomial, ou seja, usando a expressão $A^k = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_{\ell}(k) A^{\ell}$:

³A forma diagonal $A = \Sigma \Lambda \Sigma^{-1}$ é obtida através da decomposição da matriz A em autovalores e autovetores, como apresentado no Apêndice A.4.

Para usar o método polinomial, é necessário determinar os coeficientes $\alpha_\ell(k)$ resolvendo o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^k \\ (-3)^k \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2} (3(-1)^k - (-3)^k) \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2} ((-1)^k - (-3)^k) \end{aligned}$$

Portanto, a solução é dada por

$$A^k = \alpha_0(k)I + \alpha_1(k)A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(-3)^k + 3(-1)^k & -(-3)^k + (-1)^k \\ 3(-3)^k - 3(-1)^k & -(-1)^k + 3(-3)^k \end{bmatrix}, \quad k \geq 0$$

que é a mesma expressão obtida anteriormente.

7.5 Transformação de similaridade

Considere o modelo no espaço de estado

$$(7.18) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(0) &= 0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

com $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^r$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times r}$. Como visto na Seção 7.3.1, aplicando a transformada de Laplace nesse sistema, obtém-se

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

com a função de transferência $H(s)$ dada por

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Será neste momento demonstrado que uma função de transferência possui inúmeras representações no espaço de estado. Para isso, defina uma nova variável de estado

$$q(t) = Tx(t)$$

em que a matriz T é inversível (não singular). Assim, derivando $q(t)$ e usando a equação (7.18), obtém-se

$$\dot{q} = T\dot{x} = T(Ax + Bu) = T(AT^{-1}q + Bu) = TAT^{-1}q + TBu$$

A saída $y(t)$ do sistema passa a ser

$$y(t) = CT^{-1}q(t) + Du(t)$$

Assim, na nova variável de estado $q(t)$, o sistema é dado por

$$(7.19) \quad \begin{aligned} \dot{q}(t) &= \hat{A}q(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) &= \hat{C}q(t) + \hat{D}u(t) \end{aligned}$$

com $\hat{A} = TAT^{-1}$, $\hat{B} = TB$, $\hat{C} = CT^{-1}$ e $\hat{D} = D$.

Falta agora provar que esse modelo de estado na variável $q(t)$ tem a mesma função de transferência que a representação inicial (7.18). Aplicando a transformada de Laplace em (7.19), obtém-se a expressão

$$Y(s) = \left\{ \hat{C} (sI - \hat{A})^{-1} \hat{B} + \hat{D} \right\} U(s)$$

Finalmente, substituindo $\hat{A} = TAT^{-1}$, $\hat{B} = TB$, $\hat{C} = CT^{-1}$ e $\hat{D} = D$ na equação acima, tem-se

$$\begin{aligned} Y(s) &= \left\{ CT^{-1} (sI - TAT^{-1})^{-1} TB + D \right\} U(s) \\ &= \left\{ CT^{-1} [T(sI - A)T^{-1}]^{-1} TB + D \right\} U(s) \\ &= \left\{ CT^{-1}T[(sI - A)]^{-1}T^{-1}TB + D \right\} U(s) \\ &= \left\{ C(sI - A)^{-1}B + D \right\} U(s) \end{aligned}$$

Dessa forma, a função de transferência é invariante em relação à transformação de similaridade, e pode-se portanto perceber que o mesmo sistema (mesma função de transferência) pode ter inúmeras representações diferentes no espaço de estado. Essas representações, no entanto, estão relacionadas entre si através de alguma transformação de similaridade.

Exemplo 7.5.1 Considere o sistema (7.18) com as matrizes A , B , C e D dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 1$$

Sua função de transferência $H(s)$ é dada por

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{s}{s+1}$$

Agora, aplicando a transformação de similaridade

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtém-se o sistema (7.19) com as matrizes $\hat{A} = TAT^{-1}$, $\hat{B} = TB$, $\hat{C} = CT^{-1}$ e $\hat{D} = D$ dadas por

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{D} = 1$$

Calculando a função de transferência desse sistema, obtém-se

$$H(s) = \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} + \hat{D} = \frac{s}{s+1}$$

que é exatamente o resultado anterior.

7.5.1 Caso discreto

O caso discreto é análogo ao caso contínuo (ver Exercício 7.11.26). Considere o sistema a tempo discreto dado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

Como visto na Seção 7.4.4, aplicando a transformada \mathcal{Z} nesse sistema, obtém-se

$$Y(z) = H(z)U(z),$$

com a função de transferência $H(z)$ dada por

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

Agora, aplicando a transformação de similaridade

$$q(k) = Tx(k), \quad |T| \neq 0$$

tem-se

$$q(k+1) = Tx(k+1) = T(Ax(k) + Bu(k)) = T(AT^{-1}q(k) + Bu(k)) = TAT^{-1}q(k) + TBu(k)$$

Assim, a saída $y(k)$ fica sendo

$$y(k) = CT^{-1}q(k) + Du(k)$$

Portanto, na nova variável de estado $q(k)$, o sistema fica sendo

$$\begin{aligned} q(k+1) &= \hat{A}q(k) + \hat{B}u(k) \\ y(k) &= \hat{C}q(k) + \hat{D}u(k) \end{aligned}$$

com $\hat{A} = TAT^{-1}$, $\hat{B} = TB$, $\hat{C} = CT^{-1}$ e $\hat{D} = D$. Sua função de transferência é dada por

$$Y(z) = \hat{H}(z)U(z), \quad \text{com} \quad \hat{H}(z) = \hat{C} \left(sI - \hat{A} \right)^{-1} \hat{B} + \hat{D}$$

Agora, seguindo passos idênticos à prova realizada no caso contínuo, obtém-se $\hat{H}(z) = H(z)$.

7.6 Polos e estabilidade assintótica

Os polos de um sistema linear representado no espaço de estado estão diretamente associados aos autovalores da matriz A . Para ver esse fato, considere o modelo de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

cujas função de transferência é dada por

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Lembrando a fórmula da inversa de uma matriz $X^{-1} = \text{adj}(X)/|X|$, tem-se

$$H(s) = \frac{C \text{adj}(sI - A)B}{|sI - A|} + D$$

Percebe-se, portanto, que os polos de $H(s)$ são as raízes do polinômio característico⁴ $\Lambda(\lambda) = |\lambda I - A|$ da matriz A , ou seja, os autovalores λ_i da matriz A . Portanto, o sistema será assintoticamente estável se a parte real dos autovalores λ_i da matriz A for negativa, ou seja, $\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0$.

7.6.1 Caso discreto

O caso discreto é análogo ao caso contínuo. Considere o sistema a tempo discreto dado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

cujas função de transferência é dada por

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

Agora, note que $H(z)$ pode ser reescrita como

$$H(z) = \frac{C \text{adj}(zI - A)B}{|zI - A|} + D$$

Novamente, os polos de $H(z)$ são os autovalores da matriz A , as raízes do polinômio característico $\Lambda(\lambda) = |\lambda I - A|$, e o sistema será assintoticamente estável se e somente se os autovalores λ_i da matriz A em magnitude forem menor do que um, ou seja, $|\lambda_i(A)| < 1$.

⁴O Apêndice A.4 descreve o problema de autovalores e autovetores. É oportuno enfatizar que pode haver cancelamentos de polos e zeros, como descrito na Seção 7.10.

7.7 Forma canônica controlável

Esta seção descreve os passos necessários para realizar, por diagrama de blocos, uma função de transferência de forma que o modelo no espaço de estado fique na forma canônica controlável.

Considere o sistema de ordem n dado por

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_n u$$

A função de transferência correspondente é

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} =: \frac{b(s)}{a(s)}$$

Para fazer a sua representação por diagrama de blocos na forma canônica controlável, reescreve-se $Y(s) = H(s)U(s)$ como

$$Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)} U(s) = b(s) Q(s)$$

com $Q(s) = U(s)/a(s)$. Assim, primeiramente representa-se o termo

$$\frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{1}{a(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

Em seguida, representa-se o termo

$$Y(s) = b(s)Q(s) = (b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n) Q(s)$$

A representação do termo $a(s)Q(s) = U(s)$, dado por

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) Q(s) = U(s)$$

ou seja, da equação diferencial

$$q^{(n)}(t) + a_1 q^{(n-1)}(t) + \dots + a_n q(t) = u(t)$$

é claramente descrita pelo diagrama de blocos da Figura 7.3.

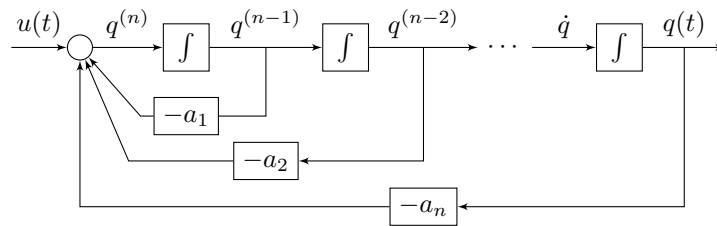


Figura 7.3: Diagrama de blocos para o termo $Q(s)/U(s)$.

Agora, é necessário representar o termo $Y(s) = b(s)Q(s)$, dado por

$$Y(s) = (b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n) Q(s)$$

que no tempo é

$$y(t) = b_0 q^{(n)}(t) + b_1 q^{(n-1)}(t) + \dots + b_{n-1} \dot{q}(t) + b_n q(t)$$

Como as variáveis $q(t), \dots, q^{(n)}$, necessárias para construir a saída $y(t)$, já estão disponíveis no diagrama da Figura 7.3, o diagrama de blocos final é facilmente construído, como apresentado na Figura 7.4.

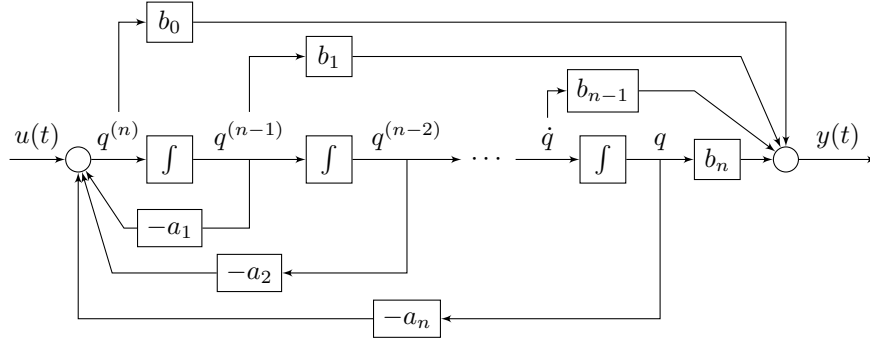


Figura 7.4: Diagrama de blocos na forma canônica controlável.

Usando esse diagrama de blocos, pode-se levantar o modelo no espaço de estado do sistema na forma canônica controlável. Para isso, associa-se⁵ um estado à saída de cada integrador, como segue:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = q & \dot{x}_1 = x_2 \\
 x_2 = \dot{q} & \implies \dot{x}_2 = x_3 \\
 x_3 = \ddot{q} & \dot{x}_3 = x_4 \\
 \vdots & \vdots \\
 x_n = q^{(n-1)} & \dot{x}_n = q^{(n)} = u - a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \cdots - a_n x_1
 \end{array}$$

A saída do sistema, nesse caso, é

$$\begin{aligned}
 y(t) &= b_n q(t) + b_{n-1} \dot{q}(t) + \cdots + b_1 q^{(n-1)}(t) + b_0 q^{(n)}(t) \\
 &= b_n x_1 + b_{n-1} x_2 + \cdots + b_1 x_n + b_0 q^{(n)}
 \end{aligned}$$

Substituindo $q^{(n)}(t)$ por $u - a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \cdots - a_n x_1$, tem-se

$$y(t) = (b_n - b_0 a_n) x_1 + (b_{n-1} - b_0 a_{n-1}) x_2 + \cdots + (b_1 - b_0 a_1) x_n + b_0 u$$

Na forma matricial, com o vetor de variáveis de estado $x(t) = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$, tem-se

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
 y &= [b_n - b_0 a_n \quad b_{n-1} - b_0 a_{n-1} \quad \cdots \quad b_1 - b_0 a_1] x(t) + [b_0] u(t)
 \end{aligned}$$

ou seja, obtém-se o seguinte modelo no espaço de estado

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\
 y(t) &= C_c x(t) + D_c u(t)
 \end{aligned}$$

com as matrizes A_c, B_c, C_c, D_c dadas acima.

Observe que nessa representação, a matriz do sistema A_c está numa forma em que os coeficientes do denominador, ou seja, do polinômio $a(s)$, estão expostos ao longo da sua última linha. Além disso, os elementos da matriz de entrada B_c são nulos, exceto na última posição.

⁵Observe que, na ordem adotada, o estado $x_1(t)$ foi associado à saída do último integrador. No entanto, a associação poderia ter sido a reversa, ou seja, o estado $x_1(t)$ poderia ter sido associado à saída do primeiro integrador. Veja o exemplo do caso discreto.

7.7.1 Caso discreto

Seja a função de transferência discreta

$$H(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} =: \frac{b(z)}{a(z)}$$

Para representar essa função de transferência na forma canônica controlável, reescreve-se $Y(z) = H(z)U(z)$ como

$$Y(z) = b(z)Q(z), \quad Q(z) = \frac{U(z)}{a(z)}$$

Assim, primeiro descreve-se a função de transferência $Q(z) = U(z)/a(z)$ e, em seguida, a função de transferência $Y(z) = b(z)Q(z)$. Portanto, os passos são análogos aos descritos no caso contínuo.

O método será apresentado através de um exemplo. Considere o caso $n = 3$ dado por

$$H(z) = \frac{b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3} =: \frac{b(z)}{a(z)}$$

Como $a(z)Q(z) = U(z)$, tem-se

$$(z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3)Q(z) = U(z)$$

que no tempo corresponde à seguinte equação de diferenças:

$$q(k+3) + a_1 q(k+2) + a_2 q(k+1) + a_3 q(k) = u(k)$$

A representação por diagrama de blocos dessa equação está apresentado na Figura 7.5.

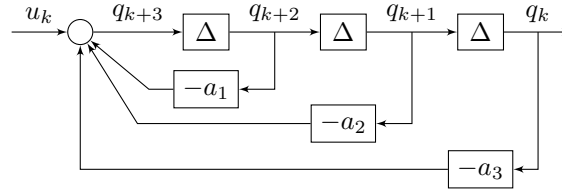


Figura 7.5: Diagrama de blocos para o termo $Q(z)/U(z)$.

Para a saída $Y(z) = Q(z)b(z)$, tem-se

$$Y(z) = (b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3)Q(z)$$

cujas equação de diferenças correspondente é dada por

$$y(k) = b_0 q(k+3) + b_1 q(k+2) + b_2 q(k+1) + b_3 q(k)$$

Assim, o diagrama final está apresentada na Figura 7.6.

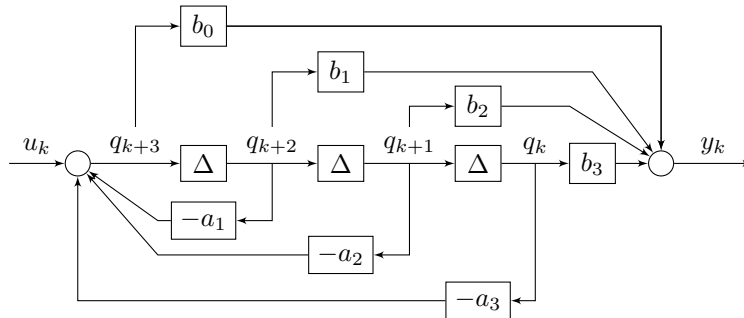


Figura 7.6: Diagrama de blocos na forma canônica controlável.

Para levantar o modelo no espaço de estado, na forma canônica controlável, associa-se⁶ um estado à saída de cada atraso, como segue:

$$x_1(k) = q(k+2), \quad x_2(k) = q(k+1), \quad x_3(k) = q(k)$$

Assim, a equação no espaço de estado é dada por

$$\begin{aligned} x_3(k+1) &= q(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) &= q(k+2) = x_1(k) \\ x_1(k+1) &= q(k+3) = u(k) - a_1x_1(k) - a_2x_2(k) - a_3x_3(k) \end{aligned}$$

Definindo o vetor de variáveis de estado como

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) & x_2(k) & x_3(k) \end{bmatrix}^T$$

a equação no espaço de estado fica sendo

$$x(k+1) = A_c x(k) + B_c u(k)$$

com

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A equação de saída pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} y(k) &= b_0q(k+3) + b_1q(k+2) + b_2q(k+1) + b_3q(k) \\ &= b_0q(k+3) + b_1x_1(k) + b_2x_2(k) + b_3x_3(k) \end{aligned}$$

Substituindo $q(k+3)$ por $u(k) - a_1x_1(k) - a_2x_2(k) - a_3x_3(k)$, obtém-se

$$y(k) = (b_1 - a_1b_0)x_1(k) + (b_2 - a_2b_0)x_2(k) + (b_3 - a_3b_0)x_3(k) + b_0u(k)$$

Na forma matricial, tem-se

$$y(k) = C_c x(k) + D_c u(k)$$

com

$$C_c = \begin{bmatrix} b_1 - a_1b_0 & b_2 - a_2b_0 & b_3 - a_3b_0 \end{bmatrix}, \quad D_c = [b_0]$$

7.8 Forma canônica observável

Considere o sistema de ordem n dado por

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = b_0u^{(n)} + b_1u^{(n-1)} + \dots + b_nu$$

A função de transferência correspondente é

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0s^n + b_1s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} =: \frac{b(s)}{a(s)}$$

Pode-se mostrar que a sua representação na forma canônica observável é dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_nb_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1}b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1b_0 \end{bmatrix} u(t) \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + [b_0]u(t) \end{aligned}$$

O procedimento para determinar essa representação canônica observável será ilustrado para o caso discreto.

⁶Note que também é possível utilizar a ordem reversa, ou seja, o estado $x_1(k)$ poderia ter sido associado à saída do último atraso puro Δ , como adotado no caso contínuo.

7.8.1 Caso discreto

Seja a função de transferência

$$H(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} := \frac{b(z)}{a(z)}$$

Considere o caso $n = 3$. Usando a relação

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{b(z)}{a(z)}U(z)$$

tem-se $a(z)Y(z) = b(z)U(z)$, ou seja,

$$z^3 Y(z) + a_1 z^2 Y(z) + a_2 z Y(z) + a_3 Y(z) = b_0 z^3 U(z) + b_1 z^2 U(z) + b_2 z U(z) + b_3 U(z)$$

Observe que essa equação no tempo (desconsiderando as condições iniciais) fica sendo

$$y(k+3) + a_1 y(k+2) + a_2 y(k+1) + a_3 y(k) = b_0 u(k+3) + b_1 u(k+2) + b_2 u(k+1) + b_3 u(k)$$

A equação acima, no domínio da frequência, pode ainda ser reescrita como

$$b_3 U(z) - a_3 Y(z) = \underbrace{z^3 Y(z) - b_0 z^3 U(z) + a_1 z^2 Y(z) - b_1 z^2 U(z) + a_2 z Y(z) - b_2 z U(z)}_{P_1(z)}$$

Definindo-se o termo $P_1(z)$ da forma acima, tem-se

$$z^3 Y(z) - b_0 z^3 U(z) + a_1 z^2 Y(z) - b_1 z^2 U(z) + a_2 z Y(z) - b_2 z U(z) = P_1(z) = b_3 U(z) - a_3 Y(z)$$

Multiplicando o termo $P_1(z)$ por z^{-1} , tem-se

$$z^{-1} P_1(z) = \underbrace{z^2 Y(z) - b_0 z^2 U(z) + a_1 z Y(z) - b_1 z U(z)}_{P_2(z)} + a_2 Y(z) - b_2 U(z)$$

Definindo-se o termo $P_2(z)$ da forma acima, tem-se

$$z^2 Y(z) - b_0 z^2 U(z) + a_1 z Y(z) - b_1 z U(z) = P_2(z) = b_2 U(z) - a_2 Y(z) + z^{-1} P_1(z)$$

Multiplicando agora o termo $P_2(z)$ por z^{-1} , tem-se

$$z^{-1} P_2(z) = \underbrace{z Y(z) - b_0 z U(z)}_{P_3(z)} + a_1 Y(z) - b_1 U(z)$$

Definindo-se o termo $P_3(z)$ da forma acima, tem-se

$$z Y(z) - b_0 z U(z) = P_3(z) = b_1 U(z) - a_1 Y(z) + z^{-1} P_2(z)$$

Multiplicando o termo $P_3(z)$ por z^{-1} , obtém-se finalmente

$$z^{-1} P_3(z) = Y(z) - b_0 U(z) \quad \implies \quad Y(z) = b_0 U(z) + z^{-1} P_3(z)$$

O diagrama de blocos obtido com os passos acima está apresentado na Figura 7.7 abaixo.

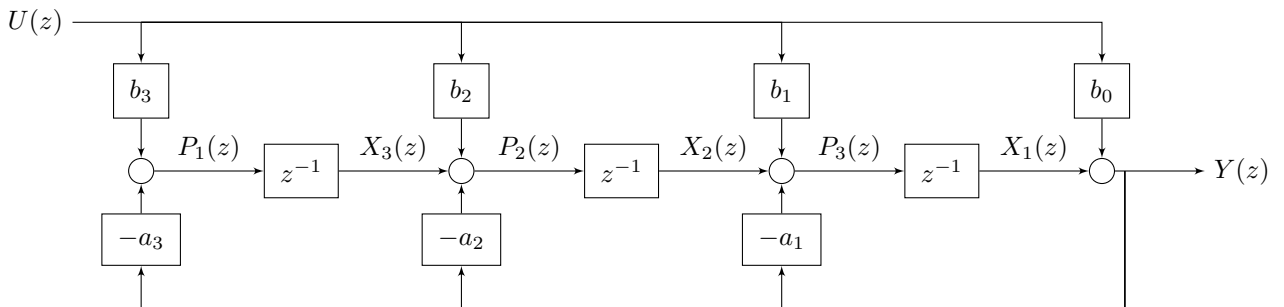


Figura 7.7: Diagrama de blocos na forma canônica observável.

Definindo os estados x_1 , x_2 e x_3 como sendo a saída dos blocos de atraso, tem-se

$$\begin{aligned} y(k) &= x_1(k) + b_0 u(k) \\ x_1(k+1) &= x_2(k) + b_1 u(k) - a_1 y(k) \\ &= -a_1 x_1(k) + x_2(k) + (b_1 - b_0 a_1) u(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) + b_2 u(k) - a_2 y(k) \\ &= -a_2 x_1(k) + x_3(k) + (b_2 - b_0 a_2) u(k) \\ x_3(k+1) &= b_3 u(k) - a_3 y(k) \\ &= -a_3 x_1(k) + (b_3 - b_0 a_3) u(k) \end{aligned}$$

Na forma matricial, tem-se

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_o x(k) + B_o u(k) \\ y(k) &= C_o x(k) + D_o u(k) \end{aligned}$$

com

$$A_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_3 - a_3 b_0 \end{bmatrix}, \quad C_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_o = [b_0]$$

Observação 7.8.1 Uma representação alternativa do diagrama de blocos da forma canônica observável da Figura 7.7 está apresentada no Exercício 7.11.28.

7.9 Forma canônica de Jordan

Esta seção descreve a representação por diagrama de blocos de uma função de transferência conhecida como forma canônica de Jordan, que é baseada na decomposição em frações parciais. Será apresentado apenas o caso contínuo, já que a derivação do caso discreto é análoga.

7.9.1 Forma modal

Quando os polos da função de transferência são todos distintos, a representação no espaço de estado (da forma de Jordan) fica numa estrutura diagonal, assim, essa representação também é conhecida como forma diagonal ou modal. Suponha que a função de transferência

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

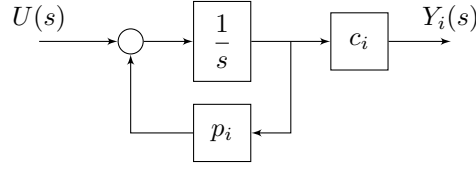
tenha a seguinte decomposição em frações parciais:

$$\begin{aligned} H(s) &= c_0 + \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - p_n} \\ &= H_0 + H_1(s) + H_2(s) + \cdots + H_n(s) \end{aligned}$$

em que os polos, reais ou complexos, são todos distintos. Note que cada fração parcial

$$H_i(s) = \frac{Y_i(s)}{U(s)} = \frac{c_i}{s - p_i}, \quad i \geq 1$$

pode ser representada pelo seguinte diagrama de blocos:



Percebe-se, portanto, que a função de transferência $H(s)$ será a soma (a conexão em paralelo) de cada um dos blocos $H_i(s)$. Por exemplo, suponha que a função de transferência $H(s)$ seja dada por

$$H(s) = \frac{s^2 + 8s + 14}{s^2 + 7s + 12}$$

Expandindo essa função de transferência em termos de seus polos (modos), tem-se

$$H(s) = 1 + \frac{2}{s+4} - \frac{1}{s+3}$$

Assim, sua representação na forma canônica de Jordan (mais especificamente, na forma modal, uma vez que os polos são distintos) é facilmente obtida como a estrutura em paralelo apresentada na Figura 7.8, que representa a soma das frações parciais.

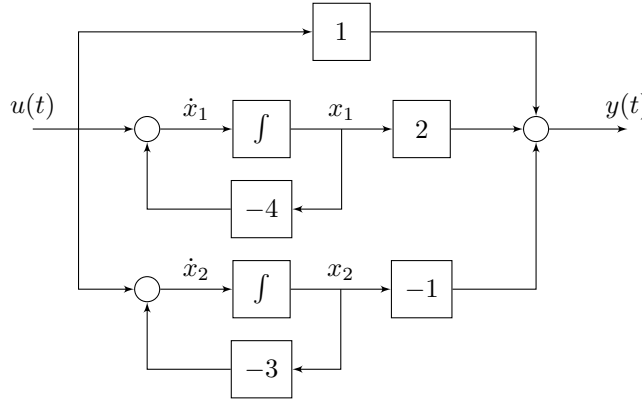


Figura 7.8: Diagrama de blocos de $H(s)$ na forma modal.

O modelo no espaço de estado, obtido diretamente do diagrama da Figura 7.8, é dado por

$$\dot{x}_1(t) = u(t) - 4x_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t) - 3x_2(t)$$

com a saída $y(t)$ dada por

$$y(t) = u(t) + 2x_1(t) - x_2(t)$$

Assim, as matrizes A_m , B_m , C_m e D_m , na forma canônica modal, são dadas por

$$A_m = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_m = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_m = [1]$$

Observe que, nessa forma, a matriz A é diagonal e os seus elementos são exatamente os polos da função de transferência. Assim, o sistema está desacoplado e é possível resolver cada equação de forma independente. Resolvendo esse sistema, os estados $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são respectivamente dados por

$$x_1(t) = e^{-4t}x_1(0) + \int_0^t e^{-4(t-\tau)}u(\tau) d\tau, \quad t \geq 0$$

$$x_2(t) = e^{-3t}x_2(0) + \int_0^t e^{-3(t-\tau)}u(\tau) d\tau, \quad t \geq 0$$

7.9.2 Forma de Jordan

Suponha que a função de transferência $H(s)$ tenha a seguinte decomposição em frações parciais:

$$\begin{aligned} H(s) &= c_0 + \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{(s - p_1)^2} + \cdots + \frac{c_\ell}{(s - p_1)^\ell} + \frac{c_{\ell+1}}{s - p_{\ell+1}} + \cdots + \frac{c_n}{s - p_n} \\ &= c_0 + H_1(s) + H_2(s) + \cdots + H_\ell(s) + H_{\ell+1}(s) + \cdots + H_n(s) \end{aligned}$$

em que $p_1 = p_2 = \cdots = p_\ell$ é um polo de multiplicidade ℓ e os $n - \ell$ polos restantes são todos distintos. Para obter a representação dessa função de transferência, basta notar que uma fração parcial na forma

$$H_\ell(s) = \frac{Y_\ell(s)}{U(s)} = \frac{c_\ell}{(s - p_1)^\ell}$$

que contém um polo p_1 de multiplicidade ℓ , pode ser representada pela conexão em série de ℓ termos $1/(s - p_1)$. A Figura 7.9 apresenta o diagrama de blocos para o caso $\ell = 2$.

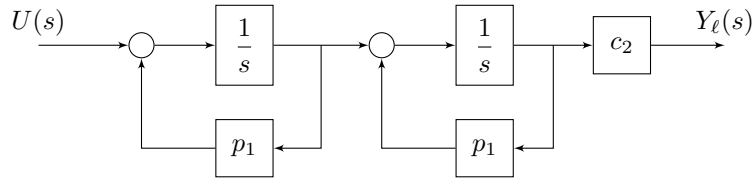


Figura 7.9: Diagrama de blocos de $\frac{c_2}{(s - p_1)^2}$.

A função de transferência $H(s)$ será então composta pela conexão em paralelo dos blocos $H_i(s)$, incluindo todas as possíveis multiplicidades. Por exemplo, suponha que a função de transferência $H(s)$ seja dada por

$$(7.20) \quad H(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{(s - p_2)^2} + \frac{c_3}{s - p_3}$$

Sua representação na forma canônica de Jordan está apresentada na Figura 7.10.

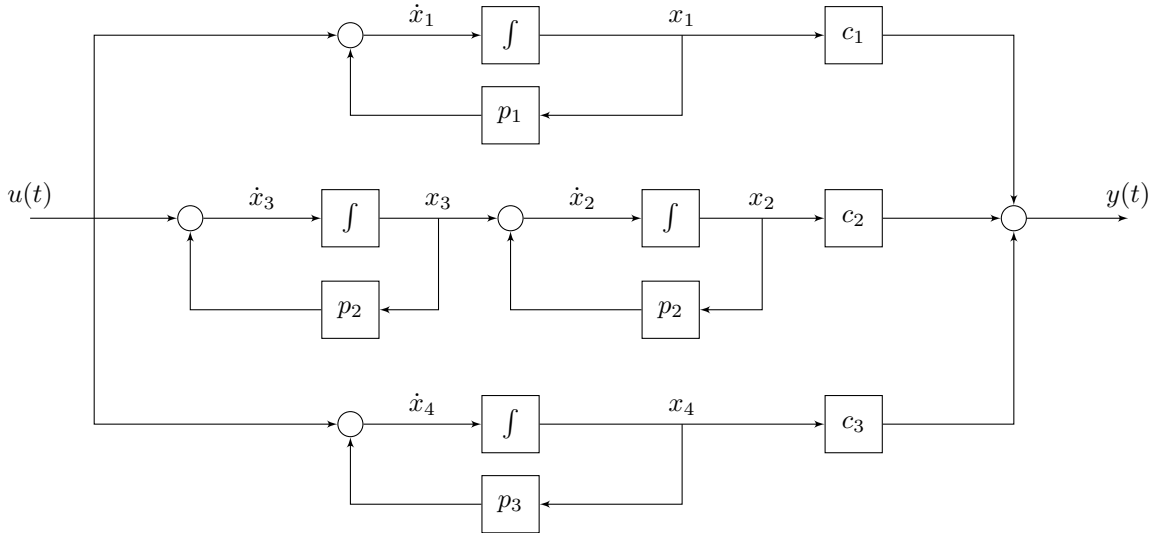


Figura 7.10: Diagrama de blocos na forma canônica de Jordan.

O modelo no espaço de estado é obtido diretamente do diagrama da Figura 7.10, como segue:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u(t) + p_1(t)x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) + p_2(t)x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= u(t) + p_2(t)x_3(t) \\ \dot{x}_4(t) &= u(t) + p_3(t)x_4(t) \end{aligned}$$

com a saída $y(t)$ dada por

$$y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_4(t)$$

Portanto, para o exemplo acima, as matrizes A_J , B_J , C_J e D_J , na forma canônica de Jordan, são dadas por

$$(7.21) \quad A_J = \begin{bmatrix} \boxed{p_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{p_2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{p_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{p_3} \end{bmatrix}, \quad B_J = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_J = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 & c_3 \end{bmatrix}, \quad D_J = [0]$$

Quando uma matriz não for diagonalizável, o mais próximo que se pode esperar de uma matriz diagonal é a forma de Jordan (ver Apêndice A.4.2), em que o elemento não nulo da diagonal superior terá valor 1. Perceba que a matriz A_J em (7.21) tem três blocos de Jordan: o primeiro de ordem 1, o segundo de ordem 2 e o terceiro também de ordem 1, os quais estão apresentados de forma explícita abaixo:

$$A_J = J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3) = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{bmatrix}, \quad J_1 = p_1, \quad J_2 = \begin{bmatrix} p_2 & 1 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}, \quad J_3 = p_3$$

É oportuno enfatizar que nessa representação, a matriz de transição de estado tem a forma

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & e^{J_2 t} & \\ & & e^{J_3 t} \end{bmatrix}$$

em que a exponencial de cada bloco, dada por $e^{J_i t}$, é facilmente calculada, como pode ser vistos pelos Exercícios 7.11.15 e 7.11.18.

7.10 Cancelamento de polos e zeros

Na apresentação das formas canônicas, não foi considerado o fato de que $H(s)$ pode apresentar cancelamentos de polos e zeros. Por exemplo, considerando $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$, $p_1 = p_2 = 1$ e $p_3 = 3$, a função $H(s)$ dada em (7.20) fica sendo

$$H(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{3}{s-3} = \frac{4s^3 - 12s^2 + 8s}{s^4 - 6s^3 + 12s^2 - 10s + 3}$$

O diagrama de blocos correspondente é ilustrado na Figura 7.10, e a representação na forma canônica de Jordan é detalhada em (7.21).

No entanto, ao fatorar $H(s)$ como um produto de polos e zeros, obtém-se, de forma equivalente:

$$H(s) = \frac{4s(s-2)(s-1)}{(s-3)(s-1)^3} = \frac{4s(s-2)}{(s-3)(s-1)^2} = \frac{4s^2 - 8s}{s^3 - 5s^2 + 7s - 3}$$

Isso resulta em um cancelamento de polo e zero, reduzindo assim a ordem de $H(s)$ de quatro para três. Para essa função de transferência, agora de ordem três, uma representação na forma de Jordan pode ser dada por

$$A_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_J = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Outra possível representação com A_J na forma de Jordan é dada por

$$A_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_J = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_J = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

A matriz da transformação de similaridade que relaciona essas duas representações é dada por

$$T = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

7.10.1 Caso discreto

Assim como no caso contínuo, o cancelamento de polos e zeros também ocorre no caso discreto. Para ilustrar isso facilmente, basta supor uma função $H(z)$ tendo mesma forma que o $H(s)$ anterior, ou seja

$$H(z) = \frac{4z^3 - 12z^2 + 8z}{z^4 - 6z^3 + 12z^2 - 10z + 3}$$

que, aparentemente, possui ordem quatro. Porém, foi visto que essa função tem a seguinte fatorização:

$$H(z) = \frac{4z(z-2)(z-1)}{(z-3)(z-1)^3} = \frac{4z(z-2)}{(z-3)(z-1)^2} = \frac{4z^2 - 8z}{z^3 - 5z^2 + 7z - 3}$$

cujas a ordem é reduzida para três devido a um cancelamento de polo e zero.

7.11 Exercícios

Exercício 7.11.1 Represente no espaço de estado o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}\ddot{q}(t) + 2\ddot{w}(t) - \ddot{w}(t) &= 0 \\ \ddot{q}(t) + \ddot{w}(t) + q(t) &= u(t)\end{aligned}$$

em que as saídas são dadas por

$$\begin{aligned}y_1(t) &= \ddot{q}(t) - w(t) + 2u(t) \\ y_2(t) &= \ddot{w}(t) + u(t)\end{aligned}$$

Assuma que os estados sejam $x_1(t) = q(t)$, $x_2(t) = w(t)$, $x_3(t) = \dot{q}(t)$, $x_4(t) = \dot{w}(t)$ e assim sucessivamente. Usando as matrizes (A, B, C, D) assim obtidas, determine a função de transferência $H(s)$.

Exercício 7.11.2 Represente o sistema abaixo nas formas canônicas controlável, observável e de Jordan:

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 - 1}$$

Exercício 7.11.3 Considere uma função de transferência de segunda ordem $H(s)$ com um par de polos complexos conjugados, $p_1 = -\sigma + j\omega$ e $p_2 = -\sigma - j\omega$, com os correspondentes resíduos $c_1 = \lambda + j\gamma$ e $c_2 = \lambda - j\gamma$, ou seja,

$$H(s) = \frac{\lambda + j\gamma}{s + \sigma - j\omega} + \frac{\lambda - j\gamma}{s + \sigma + j\omega}$$

Mostre que a representação na forma canônica controlável de $H(s)$ no espaço de estado é dada por

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\sigma^2 + \omega^2) & -2\sigma \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_c = \begin{bmatrix} 2(\lambda\sigma - \omega\gamma) & 2\lambda \end{bmatrix}, \quad D_c = [0]$$

Exercício 7.11.4 Determine as matrizes do modelo no espaço de estado do sistema do Exercício 7.11.3 anterior na forma canônica observável.

Exercício 7.11.5 Mostre que a função de transferência do Exercício 7.11.3 anterior também tem a seguinte representação no espaço de estado:

$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & \omega \\ -\omega & -\sigma \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2\gamma & 2\lambda \end{bmatrix}, \quad D = [0]$$

Exercício 7.11.6 Para os sistemas abaixo, derive o diagrama de blocos nas formas canônicas controlável, observável e de Jordan. Em seguida, determine as respectivas representações no espaço de estado.

$$1. \dot{y}(t) = 2u(t)$$

$$2. H(s) = \frac{10}{s^2(s^2 + 6s + 10)}$$

$$3. H(s) = \frac{10}{(s + 3)^2(s^2 + 6s + 10)}$$

Exercício 7.11.7 Dado o diagrama de blocos da Figura 7.11 abaixo, derive a representação no espaço de estado e a função de transferência correspondente. Em seguida, derive o diagrama de blocos na forma canônica de Jordan e a respectiva representação no espaço de estado.

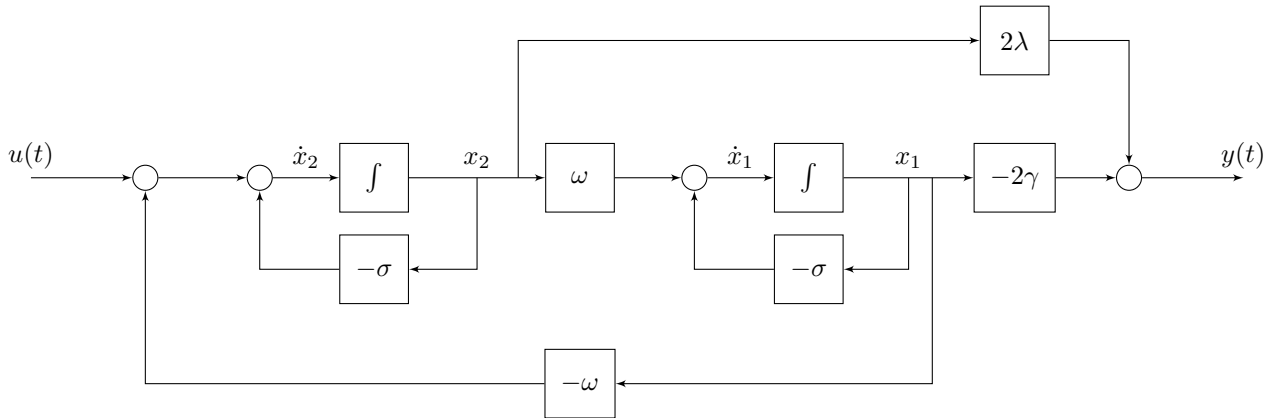


Figura 7.11: Diagrama de blocos.

Exercício 7.11.8 Considere o modelo simplificado de uma suspensão veicular, apresentado na Figura 7.12, em que a saída $y(t)$ é o deslocamento da massa m e a entrada $w(t)$ é um sinal de distúrbio proveniente da via. Os dados numéricos para esse sistema são: $m = 10 \text{ Kg}$, $c = 200 \text{ Ns/m}$ e $k = 1000 \text{ N/m}$. Represente esse sistema, por diagramas de blocos, nas formas canônicas controlável, observável e de Jordan. Em seguida, determine os respectivos modelos no espaço de estado.

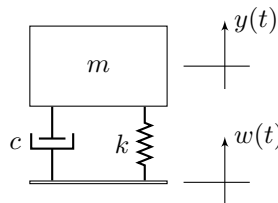


Figura 7.12: Modelo simplificado de uma suspensão veicular.

Exercício 7.11.9 Usando uma frequência de amostragem $f_s = 10 \text{ Hz}$, discretize o modelo da suspensão veicular acima, obtendo a sua função de transferência $H(z) = Y(z)/W(z)$. Em seguida, apresente os diagramas de blocos de $H(z)$ nas formas canônicas controlável, observável e de Jordan, e determine os respectivos modelos discretos no espaço de estado.

Exercício 7.11.10 Determine a função de transferência $H(s)$ correspondente ao sistema descrito pelas seguintes matrizes no espaço de estado:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Exercício 7.11.11 Prove as seguintes propriedades da matriz de transição de estado são:

$$1. e^0 = I$$

$$2. \frac{de^{Xt}}{dt} = Xe^{Xt} = e^{Xt}X$$

$$3. e^{X(t_1+t_2)} = e^{Xt_1}e^{Xt_2}$$

$$4. (e^X)^{-1} = e^{-X}$$

$$5. e^{X^T} = (e^X)^T$$

$$6. \text{ Se } YX = XY \text{ (comutam), então } e^Y e^X = e^X e^Y = e^{Y+X}.$$

$$7. \text{ Se } |Y| \neq 0, \text{ então } e^{YXY^{-1}} = Y e^X Y^{-1}$$

$$8. \text{ Se } X = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \text{ for uma matriz diagonal, então } e^X = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n})$$

Exercício 7.11.12 Mostre que a solução da equação diferencial homogênea

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t_0) = x_0$$

para uma condição inicial $x(t_0)$, que ocorre num instante de tempo t_0 (não necessariamente nulo), é dada por

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$$

Exercício 7.11.13 Considere que α é um escalar e que a matriz A é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mostre que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 7.11.14 Considere que λ é um escalar, I é a matriz identidade e X é uma matriz qualquer. Mostre que

$$e^{\lambda I + X} = e^{\lambda} e^X$$

Exercício 7.11.15 Considere que α e λ são escalares e que a matriz A é dada por

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Mostre que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & \alpha t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

Exercício 7.11.16 Considere que λ , α , μ e γ são escalares e que matriz A é dada por

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Mostre que para $\lambda \neq \mu$ a matriz exponencial e^{At} é dada por

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & \alpha \gamma \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \gamma = \frac{e^{\lambda t} - e^{\mu t}}{\lambda - \mu}$$

Exercício 7.11.17 Mostre que a matriz de transição de estado e^{At} do sistema homogêneo $\dot{x}(t) = Ax(t)$, sendo A a matriz do Exercício 7.11.5, é dada por

$$e^{At} = e^{-\sigma t} R(t), \quad \text{com} \quad R(t) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}$$

A matriz $R(t)$ acima é conhecida como **matriz de rotação**. É uma matriz que tem vasta aplicação na engenharia, principalmente para representar a rotação de objetos no espaço. Essa matriz tem as seguintes propriedades: $\det R = 1$, $R^{-1} = R^T$, $R^n(t) = R(nt)$, entre outras.

Exercício 7.11.18 Para o bloco de Jordan de ordem $k \times k$ dado por

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}_{k \times k}$$

mostre que a inversa de $(sI - J)^{-1}$ é dada por

$$\begin{aligned} (sI - J)^{-1} &= \begin{bmatrix} s - \lambda & -1 & & \\ & s - \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & s - \lambda \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (s - \lambda)^{-1} & (s - \lambda)^{-2} & \cdots & (s - \lambda)^{-k} \\ & (s - \lambda)^{-1} & \cdots & (s - \lambda)^{-k+1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & (s - \lambda)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= (s - \lambda)^{-1} I + (s - \lambda)^{-2} F_1 + \cdots + (s - \lambda)^{-k} F_{k-1} \end{aligned}$$

em que F_i é a matriz com 1 na i -ésima diagonal superior. Em seguida, mostre que a matriz de transição de estado é dada por

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \left(I + tF_1 + \frac{t^2}{2} F_2 + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} F_{k-1} \right) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ & & 1 & \cdots & \frac{t^{k-3}}{(k-3)!} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 7.11.19 Usando o resultado do Exercício 7.11.18, mostre que a resposta $y(t)$ do sistema dado no Exercício 7.11.10 para uma entrada impulsiva e condição inicial $x(0) = [a \ b \ c]^T$ é

$$y(t) = e^t (1 + 2a + b + 3(1 + c)e^{2t} + 2t + 2bt)$$

Exercício 7.11.20 Mostre que a solução forçada

$$y_f(k) = \sum_{l=0}^{k-1} CA^{k-l-1} Bu(l) + Du(k)$$

é dada pela convolução da resposta ao impulso do sistema (7.17), dada por

$$h(k) = CA^{k-1} B\mu(k-1) + D\delta(k)$$

com a entrada $u(k)$.

Exercício 7.11.21 Discretize o sistema de equações (7.11.1) usando a seguinte fórmula:

$$f^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+n} \binom{n}{k} f(x+k), \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

e assim derive as matrizes (A, B, C, D) de sua representação discreta no espaço de estado, tendo a forma:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

Em seguida, derive a função de transferência $H(z)$ usando essas matrizes.

Exercício 7.11.22 Represente no espaço de estado o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}q(k+2) + 2w(k+2) - w(k) &= u(k) \\ q(k+2) - w(k+2) + q(k) &= -u(k)\end{aligned}$$

em que as saídas são dadas por

$$\begin{aligned}y_1(k) &= q(k+2) - w(k) + 2u(k) \\ y_2(k) &= w(k+1) + u(k)\end{aligned}$$

Assuma que os estados sejam $x_1(k) = q(k)$, $x_2(k) = w(k)$, $x_3(k) = q(k+1)$, $x_4(k) = w(k+1)$ e assim sucessivamente. Usando as matrizes (A, B, C, D) assim obtidas, determine a função de transferência $H(z)$.

Exercício 7.11.23 Determine a solução $x(k)$ da equação de diferenças homogênea

$$x(k+1) = Ax(k), \quad k \geq 0$$

para uma condição inicial $x(k_0) = x_0$, que ocorre num instante de tempo k_0 (não necessariamente nulo).

Exercício 7.11.24 Determine a solução $x(k)$ da equação de diferenças não homogênea

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k \geq 0$$

para uma entrada $u(k)$, tal que $u(k) = 0$ para $k < k_0$, e condição inicial $x(k_0) = x_0$.

Exercício 7.11.25 Mostre que, para o sistema discreto

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

os autovalores λ_i da matriz A são os polos de $H(z)$. Determine, assim, as condições sobre $\lambda_i(A)$ para que o sistema seja assintoticamente estável.

Exercício 7.11.26 Seja o sistema

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

Aplicando a transformação de similaridade $q = Tx$, determine as matrizes \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} e \hat{D} da nova representação de estado

$$\begin{aligned}q(k+1) &= \hat{A}q(k) + \hat{B}u(k) \\ y(k) &= \hat{C}q(k) + \hat{D}u(k)\end{aligned}$$

Em seguida, mostre que ambos sistemas possuem a mesma função de transferência.

Exercício 7.11.27 Mostre que uma representação na forma canônica de Jordan da função transferência

$$H(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2}$$

é dada por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad D = 0$$

Exercício 7.11.28 Mostre que é possível obter a representação equivalente à apresentada no diagrama de blocos da Figura 7.7 usando como realimentação a saída do último bloco de atraso, ou seja, o estado $x_1(k)$ ao invés do sinal $y(k)$. No mais, determine as matrizes A , B , C e D do modelo no espaço de estado.

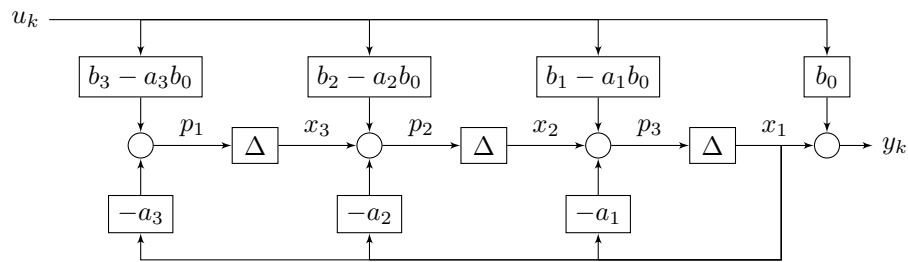


Figura 7.13: Diagrama alternativo da forma canônica observável.

Exercício 7.11.29 Coloque o sistema do Exercício 7.11.28 na forma canônica controlável.

Capítulo 8

Referências Bibliográficas

8.1 Dinâmica, modelagem e vibrações

1. Dean C. Karnopp, Donald L. Margolis and Ronald C. Rosenberg. *System Dynamics: Modeling and Simulation of Mechatronic Systems*, 2006.
2. Brown, F. T., *Engineering System Dynamics*, Marcel-Dekker, 2001.
3. Ogata, K., *System Dynamics*. New Jersey, Prentice-Hall, 1978.
4. Doebelin, E.O., *System Modelling and Response*. New York, Wiley, 1980.
5. L. G. Kraige, J. L. Meriam, *Mecânica para Engenharia: Dinâmica*. 6 Ed., Vol. 2. LTC, 2016.
6. Santos I. F., *Dinâmica de Sistemas Mecânicos*. Pearson, 2001.
7. Inman, D. J., *Engineering Vibration*, 2nd Edition, Prentice-Hall, 2001.
8. Thomson, W. T., *Teoria da Vibração com Aplicações*, Editora Interciência, 1978.

8.2 Fundamentos matemáticos e equações diferenciais

1. E. Kreyszig, *Matemática Superior para Engenharia*. Vol. 1. LTC, 2009.
2. Boyce, W. E., DiPrima, R. C., *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. LTC, 2010.

8.3 Análise linear e controle de sistemas dinâmicos

1. Sinha, Naresh K., *Linear Systems*, John Wiley & Sons, 1991.
2. Oppenheim, A. and Willsky, A., *Signal & Systems*, 2nd Edition, Prent. Hall, 1997.
3. Roberts, M. J. *Fundamentos em Sinais e Sistemas*, McGraw-Hill, 2009.
4. Geromel, J. C. e Palhares, A. G. B., *Análise Linear de Sistemas Dinâmicos*, Edgard Blücher, 2004.
5. Bottura, C. P., *Análise Linear de Sistemas*, Editora Guanabara II, 1982.
6. Bonatti, I., Lopes, A. e Peres, P., *Linearidade em Sinais e Sistemas*, Apostila, FEEC/Unicamp, 2008.
<http://www.dt.fee.unicamp.br/~peres/LSS.pdf>
7. Chen, C. T., *Linear Systems Theory & Design*, 3rd Ed., Oxford Univ. Press, 1999.
8. Kailath, T., *Linear Systems*, Prent. Hall, Inc., 1980.
9. Luenberger, D. G., *Introduction to Dynamic Systems — Theory, Models, and Applications*, John Wiley & Sons, Inc., 1979.

8.4 Análise de Fourier

1. Ruel V. Churchill, James W. Brown, *Fourier Series and Boundary Value Problems*. McGraw-Hill Book Company. 1993.
2. Maxime Bôcher. *Introduction to the Theory of Fourier's Series*. The Annals of Mathematics. 1906.
3. Arruda, J. R. F. e Huallpa. B. N., *Análise Espectral de Sinais e Sistemas Mecânicos Lineares*, Apostila, FEM/Unicamp, 2006.

Apêndice A

Preliminares Matemáticos

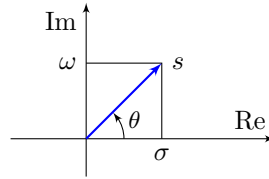
A.1 Funções de variáveis complexas

Este apêndice apresenta uma breve introdução ao número complexo e a funções de variáveis complexas.

Um número complexo s é um número que pode ser escrito na forma

$$s = \sigma + j\omega$$

em que a parte real σ e a parte imaginária ω são números reais e j é a unidade imaginária com a propriedade $j^2 = -1$, i.e. $j = \sqrt{-1}$. A figura abaixo apresenta graficamente um número complexo s em sua forma polar.



O ângulo $\theta = \arg(s)$ é o argumento (o ângulo de fase em radianos) de s . Esse argumento só está definido para $s \neq 0$. Considera-se como sendo positivo o sentido anti-horário do ângulo θ . Observe que o argumento de um número complexo não é único, já que difere por um múltiplo inteiro de 2π , ou seja, se θ for um argumento do número complexo s , então $\theta + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, também será. O valor de $\arg(s)$ limitado ao intervalo $(-\pi, \pi]$ é denominado de **argumento principal**. Por outro lado, θ será denominado **argumento mínimo positivo**, se for limitado ao intervalo $[0, 2\pi)$. A Figura A.1 abaixo apresenta o ângulo θ e os argumentos principal e mínimo positivo de $e^{j\theta}$.

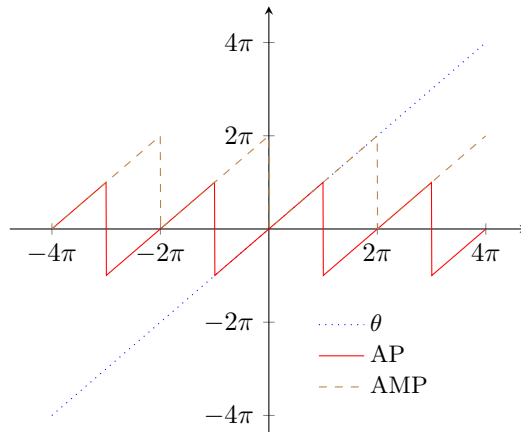


Figura A.1: Ângulo θ e os argumentos principal (AP) e mínimo positivo (AMP) de $e^{j\theta}$.

O complexo conjugado de s , denotado por \bar{s} , é dado por

$$\bar{s} = \sigma - j\omega$$

O valor absoluto de um número complexo s é

$$|s| = \sqrt{s\bar{s}} = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$$

Usando a identidade de Euler

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

obtem-se as seguintes expressões para o seno e o cosseno:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Da identidade de Euler percebe-se que um número complexo s pode ser escrito na forma exponencial

$$s = re^{j\theta}$$

em que $r = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ é o valor absoluto (o módulo) de s e $\theta = \arg(s)$ é o argumento (o ângulo de fase em radianos) de s . Note que a expressão mais comum para o cálculo do ângulo, dada por $\theta = \arctan(\omega/\sigma) = \tan^{-1}(\omega/\sigma)$, não considera o quadrante em que s se encontra, fornecendo assim $-\pi/2 < \theta \leq \pi/2$. Por outro lado, a função arco-tangente que considera todos os quatro quadrantes, fornecendo o argumento principal, é dada por $\theta = \text{atan2}(\omega, \sigma)$. Nesse caso, tem-se $-\pi < \theta \leq \pi$. A função atan2 pode ser definida como segue:

$$\text{atan2}(\omega, \sigma) = \begin{cases} \arctan(\omega/\sigma), & \text{se } \sigma > 0 \\ \arctan(\omega/\sigma) + \pi, & \text{se } \sigma < 0 \text{ e } \omega \geq 0 \\ \arctan(\omega/\sigma) - \pi, & \text{se } \sigma < 0 \text{ e } \omega < 0 \\ +\pi/2, & \text{se } \sigma = 0 \text{ e } \omega > 0 \\ -\pi/2, & \text{se } \sigma = 0 \text{ e } \omega < 0 \\ \text{indefinido}, & \text{se } \sigma = 0 \text{ e } \omega = 0 \end{cases}$$

No mais, é oportuno enfatizar que:

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \text{sign}(x)\pi/2$$

em que a função $\text{sign}(x)$ será -1 , se x for negativo, e $+1$ se x for positivo.

Exemplo A.1.1 Seja o número complexo $s = 4 + 3j$. Então, o seu complexo conjugado é $s = 4 - 3j$ e o seu valor absoluto $|s| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Esse número complexo pode ser representado na forma exponencial com $s = 5e^{j\theta}$ e $\theta = \arctan(3/4) \approx 0.6435$.

Observe que para número complexo $\lambda = \sigma + j\omega$ e seu conjugado $\bar{\lambda} = \sigma - j\omega$, tem-se

$$\lambda^n + \bar{\lambda}^n = (\sigma + j\omega)^n + (\sigma - j\omega)^n = 2(\sigma^2 + \omega^2)^{n/2} \cos(n\theta)$$

em que $\theta = \text{atan2}(\sigma, \omega)$ é o argumento, o ângulo de fase em radianos no intervalo $(-\pi, +\pi)$, do número complexo λ . No mais, para $\gamma = \alpha + \beta I$, tem-se

$$\bar{\gamma}\lambda^n + \gamma\bar{\lambda}^n = 2(\sigma^2 + \omega^2)^{(n/2)} (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))$$

As funções complexas são funções com valores complexos, definidas num subconjunto D dos números complexos \mathbb{C} , ou seja, $F : D \rightarrow \mathbb{C}$, com $D \in \mathbb{C}$. Para um número complexo $s = (\sigma + j\omega) \in D$ com $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$, a função $F(s)$ pode ser escrita na forma

$$F(\sigma + j\omega) = R(\sigma, \omega) + jV(\sigma, \omega)$$

com $R(\sigma, \omega), V(\sigma, \omega) \in \mathbb{R}$. As funções $R(\sigma, \omega)$ e $V(\sigma, \omega)$ são respectivamente denominadas de parte real e parte imaginária da função $F(s)$.

Considere a função $F(s)$ dada por

$$F(s) = \frac{(s+2)(s+5)}{(s+1)(s+10)(s+20)^2}$$

Os zeros dessa função são todos os valores de s tais que $F(s) = 0$. Portanto, $s = -2$ e $s = -5$ são os zeros de $F(s)$. Note que se forem considerados valores de s tais que $|s| \rightarrow \infty$, tem-se que $F(s) \rightarrow s^2/s^4 = 1/s^2$. Assim, surgem mais dois zeros em $|s| \rightarrow \infty$. Por outro lado, os polos de uma função $F(s)$ são os valores de s tais que $F(s)$ venha a ser indefinida. Para o exemplo acima, os polos são $s = -1$, $s = -10$, $s = -20$ e $s = -20$ (polo de multiplicidade 2 em $s = \pm 20$).

A.2 Equações diferenciais ordinárias lineares

Considere a seguinte equação diferencial¹ de ordem n homogênea dada por

$$(A.1) \quad y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = 0$$

Uma solução dessa equação diferencial é uma função $\phi(t)$ qualquer que satisfaça (A.1), ou seja, tal que

$$\phi^{(n)}(t) + a_1 \phi^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n \phi(t) = 0$$

Claramente, se $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ são duas soluções de (A.1), então qualquer combinação linear $\alpha_1 \phi_1(t) + \alpha_2 \phi_2(t)$, com α_1 e α_2 escalares quaisquer, também será uma solução. Essa propriedade é conhecida como **princípio da superposição**. Desta forma, existem infinitas soluções $\phi(t)$ que satisfazem (A.1). Porém, a equação diferencial (A.1) terá no máximo n soluções linearmente independentes. Sempre é possível determinar um conjunto com n soluções linearmente independentes, chamado de **conjunto fundamental**.

Suponha que sejam conhecidas n soluções linearmente independentes $\phi_i(t)$, com $i = 1, \dots, n$. Então, uma solução qualquer $y(t)$ de (A.1) pode ser descrita como uma combinação linear dessas n soluções linearmente independentes, ou seja

$$(A.2) \quad y(t) = \alpha_1 \phi_1(t) + \alpha_2 \phi_2(t) + \cdots + \alpha_n \phi_n(t)$$

Sabe-se que a função exponencial pode ser usada para se determinar o conjunto de soluções linearmente independentes de (A.1). Para isso, assume-se inicialmente que a solução $\phi(t)$ tem a forma

$$\phi(t) = e^{\lambda t}$$

com $\lambda \in \mathbb{C}$ um escalar a ser determinado. Substituindo essa solução em (A.1), obtém-se

$$(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n) e^{\lambda t} = 0$$

Como a função exponencial não é identicamente nula, tem-se necessariamente que

$$p_n(\lambda) = 0, \quad \text{em que} \quad p_n(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

Esse polinômio $p_n(\lambda)$, de grau n na variável λ , é denominado de **polinômio característico** da equação diferencial linear homogênea (A.1). A equação $p_n(\lambda) = 0$ é denominada de **equação característica**.

Do teorema fundamental da álgebra, consta que um polinômio de grau n possui n raízes λ_i . Caso todas as raízes sejam distintas, as funções $\phi_i(t) = e^{\lambda_i t}$, com $i = 1, \dots, n$, serão linearmente independentes e podem ser usadas, como enfatizado em (A.2), para formar um conjunto fundamental, ou seja, a base de uma solução qualquer de (A.1). No entanto, pode ocorrer que as raízes de $p_n(\lambda)$ não sejam todas distintas e que algumas

¹A notação $y^{(n)}(t)$ denota a n -ésima derivada de $y(t)$. Por exemplo, para $n = 3$, tem-se $y^{(3)}(t) = \ddot{y}(t) = \frac{d^3 y(t)}{dt^3}$.

sejam repetidas. Supondo que apenas $r < n$ raízes sejam distintas, então a função $e^{\lambda t}$ será capaz de fornecer apenas r soluções linearmente independentes e, assim, será necessário complementar o conjunto determinando-se outras $n - r$ funções linearmente independentes. Pode-se mostrar que essas $n - r$ funções restantes terão a forma $te^{\lambda t}, t^2e^{\lambda t}, t^3e^{\lambda t}, \dots$. O Exemplo A.2.1 abaixo ilustra esse fato.

Exemplo A.2.1 Considere a seguinte equação diferencial de ordem 7 homogênea dada por:

$$(A.3) \quad y^{(7)} + 3y^{(6)} + 5y^{(5)} + 7y^{(4)} + 7y^{(3)} + 5\ddot{y} + 3\dot{y} + y = 0$$

Então, o polinômio característico será

$$p_n(\lambda) = \lambda^7 + 3\lambda^6 + 5\lambda^5 + 7\lambda^4 + 7\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda + 1$$

cujas raízes são

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -1, \quad \lambda_4 = -j, \quad \lambda_5 = -j, \quad \lambda_6 = j, \quad \lambda_7 = j$$

Observe que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ são raízes repetidas de multiplicidade 3, $\lambda_4 = \lambda_5 = -j$ e $\lambda_6 = \lambda_7 = j$ são raízes repetidas de multiplicidade 2. Dessas sete raízes, apenas três são distintas: -1 , $-j$ e j . Assim, um conjunto fundamental, ou seja, uma base completa com sete funções linearmente independentes pode ser dada por

$$\phi_1(t) = e^{-t}, \quad \phi_2(t) = te^{-t}, \quad \phi_3(t) = t^2e^{-t}, \quad \phi_4(t) = e^{-jt}, \quad \phi_5(t) = te^{-jt}, \quad \phi_6(t) = e^{jt}, \quad \phi_7(t) = te^{jt}$$

Consequentemente, qualquer solução da equação diferencial homogênea (A.3) pode ser expressa como uma combinação linear dessas sete soluções linearmente independentes, ou seja

$$y(t) = \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 t e^{-t} + \alpha_3 t^2 e^{-t} + \alpha_4 e^{-jt} + \alpha_5 t e^{-jt} + \alpha_6 e^{jt} + \alpha_7 t e^{jt}$$

A solução $y(t)$ obtida no Exemplo A.2.1 acima é conhecida como **solução geral da equação diferencial homogênea**, pois as constantes α_i são arbitrárias, ou seja, é uma solução formada por qualquer combinação linear de qualquer conjunto fundamental. Essas constantes são determinadas, uma vez que as condições iniciais forem especificadas. O **problema de valor inicial** para (A.1) deve levar em consideração as suas n condições iniciais, dadas por

$$(A.4) \quad y(0) = c_0, \quad \dot{y}(0) = c_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$$

em que as constantes c_0, c_1, \dots, c_{n-1} são fornecidas, geralmente provenientes da descrição do problema físico que está sendo tratado. É oportuno enfatizar que uma vez especificadas as condições iniciais, só existirá uma única solução $y(t)$ que satisfaça (A.1) e ao mesmo tempo a condição inicial (A.4), como ilustrado no Exemplo A.2.2 abaixo.

Exemplo A.2.2, Considere que a solução da equação diferencial do Exemplo A.2.1 deva também satisfazer as seguintes condições iniciais:

$$c_0 = -1, \quad c_1 = -1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 1, \quad c_4 = 1, \quad c_5 = -3, \quad c_6 = 2$$

Assim, a **solução homogênea**, que agora é única, fica sendo

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} (2 + t + 3e^t \sin t)$$

A.3 Matriz fundamental

Considere a seguinte equação diferencial linear homogênea no espaço de estado:

$$(A.5) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de estado e $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma função contínua de t , cujos elementos são limitados. Uma solução de (A.5), é um vetor $\phi(t) \in \mathbb{R}^n$ que satisfaça a equação, ou seja, tal que $\dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t)$.

Se ϕ_1 e ϕ_2 forem duas soluções de (A.5) e c_1 e c_2 forem dois números (complexos ou reais), então $c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ também será uma solução de (A.5). Porém, dada uma condição inicial $x_0 = x(t_0)$ para (A.5), existe apenas uma única solução $\phi(t)$ que satisfaz (A.5) com $\phi(t_0) = x_0$.

Suponha que os vetores $\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)$ sejam n soluções linearmente independentes de (A.5). Então, cada solução $\phi(t)$ de (A.5) pode ser expressa unicamente como

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \dots + c_n\phi_n(t)$$

Definição A.3.1 Define-se como **equação diferencial matricial** associada ao sistema (A.5), o problema de se determinar uma matriz $X(t)$ de dimensão $n \times n$, cujas colunas sejam soluções de (A.5), ou seja:

$$(A.6) \quad \dot{X}(t) = A(t)X(t)$$

Definição A.3.2 Se $X(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ for uma matriz cujas colunas são soluções linearmente independentes de (A.5), então a matriz

$$X(t) = \begin{bmatrix} \phi_1 & \dots & \phi_n \end{bmatrix}$$

será denominada de **matriz fundamental (matriz integral)** de (A.5). Essa matriz claramente satisfaz (A.6).

Definição A.3.3 Seja $X(t)$ uma matriz fundamental qualquer de (A.5). Então a matriz

$$\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0), \quad \text{para quaisquer } t_0 \text{ e } t,$$

é conhecida como **matriz de transição de estado** de (A.5). Portanto, a solução de (A.5), para a condição inicial $x(t_0)$, é dada por

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0)$$

Note que a matriz de transição de estado $\Phi(t, t_0)$ é unicamente determinada por $A(t)$ e é independente da escolha particular da matriz fundamental $X(t)$. No mais, a matriz $\Phi(t, t_0)$ é a solução única da equação diferencial matricial

$$(A.7) \quad \frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I$$

Se $A(t) = A$ for uma matriz constante, então a matriz de transição de estado $\Phi(t, t_0)$ será dada por

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k(t-t_0)^k}{k!}$$

Exemplo A.3.1 Considere o sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & e^t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Uma matriz fundamental $X(t)$ para esse sistema é claramente dada por

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz de transição de estado $\Phi(t, t_0)$ é

$$\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0) = \begin{bmatrix} 1 & e^t - e^{t_0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para a condição inicial $x_1(0) = a$ e $x_2(0) = b$, a solução fica sendo

$$x(t) = \Phi(t, 0)x(0) = \begin{bmatrix} a + b(e^t - 1) & b \end{bmatrix}^T$$

A.4 Autovalores e autovetores

Sejam A uma matriz quadrada de dimensão $n \times n$, x um vetor de dimensão n e λ um escalar. Considere a equação

$$(A.8) \quad Ax = \lambda x$$

O valor de λ tal que essa equação possui uma solução $x \neq 0$ é denominado de autovalor. A solução correspondente $x \neq 0$ é o autovetor. Note que os autovetores não são únicos, pois mesmo que um autovetor seja multiplicado por um escalar qualquer não nulo, ele permanecerá sendo um autovetor. A equação (A.8) pode ser reescrita como

$$Ax - \lambda x = (A - \lambda I)x = (\lambda I - A)x = 0$$

Portanto, só haverá uma solução não trivial $x \neq 0$, se a matriz característica $\lambda I - A$ for singular, ou seja, se a seguinte **equação característica** for satisfeita:

$$|\lambda I - A| = 0$$

Esse determinante, dado por

$$\Lambda(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

é um polinômio escalar em λ , conhecido como **polinômio característico** da matriz A . Uma propriedade interessante desse polinômio é apresentada no Teorema A.4.1.

Teorema A.4.1 (Cayley-Hamilton) *Toda matriz quadrada A satisfaz sua equação característica, ou seja:*

$$\Lambda(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I = 0$$

Perceba que o teorema de Cayley-Hamilton expressa a potência A^n como uma combinação linear das potências inferiores.

A equação característica não é necessariamente a equação polinomial de menor grau que a matriz A satisfaz. O polinômio de menor grau que tem A como raiz é denominado de **polinômio mínimo**. Portanto, o polinômio mínimo $\mu(\lambda)$ de uma matriz $A \in R^{n \times n}$ é definido como o polinômio:

$$\mu(\lambda) = \lambda^\ell + \hat{a}_{\ell-1}\lambda^{\ell-1} + \cdots + \hat{a}_1\lambda + \hat{a}_0$$

de menor grau $\ell \leq n$ tal que

$$\mu(A) = A^\ell + \hat{a}_{\ell-1}A^{\ell-1} + \cdots + \hat{a}_1A + \hat{a}_0I = 0$$

Em geral, o polinômio mínimo de uma matriz é o próprio polinômio característico, mas nem sempre esse é o caso, como apresentado no Exemplo A.4.1.

Exemplo A.4.1 *Considere as seguintes matrizes:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Ambas matrizes possuem o mesmo polinômio característico, dado por $\Lambda_{A_1}(\lambda) = \Lambda_{A_2}(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9$. Porém, o polinômio mínimo da matriz A_1 é $\mu_{A_1}(\lambda) = \lambda + 3$, enquanto o polinômio mínimo de A_2 é $\mu_{A_2}(\lambda) = \Lambda_{A_2}(\lambda)$.

Observação A.4.1 *Pode-se mostrar que as seguintes afirmações são equivalentes: λ é um autovalor da matriz A ; λ é uma raiz do polinômio característico $\Lambda(\lambda)$; λ é uma raiz do polinômio mínimo $\mu(\lambda)$.*

O teorema de Cayley-Hamilton pode ser usado para reduzir o grau de $p(A)$, em que a matriz A tem dimensão $n \times n$ e $p(\gamma)$ é um polinômio qualquer de grau $m \geq n$, descrito por

$$p(\gamma) = \sum_{\ell=0}^m \beta_{\ell} \gamma^{\ell}$$

Pelo método da divisão polinomial, o polinômio $p(\gamma)$ de grau $m \geq n$ pode ser decomposto como

$$p(\gamma) = \Lambda(\gamma)q(\gamma) + r(\gamma)$$

em que $\Lambda(\gamma)$ é o polinômio característico de grau n da matriz A , $q(\gamma)$ é o quociente da divisão e $r(\gamma)$ é o resíduo da divisão, que tem grau máximo $n - 1$. Assim, $r(\gamma)$ é dado por

$$r(\gamma) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_{\ell} \gamma^{\ell}$$

com n coeficientes α_{ℓ} a serem determinados.

Substituindo a matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ em $p(\gamma)$ e lembrando que $\Lambda(A) = 0$, obtém-se

$$p(A) = \Lambda(A)q(A) + r(A) = r(A)$$

ou seja

$$(A.9) \quad p(A) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_{\ell} A^{\ell}$$

Exemplo A.4.2 Suponha que se deseje reduzir a expressão $p(A) = 2A^3 - 3A^2 + A - I$ em que a matriz A é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{que fornece} \quad p(A) = \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 28 & 47 \end{bmatrix}$$

Para usar a expressão (A.9), é preciso primeiro calcular o polinômio característico da matriz A , que nesse caso é dado por

$$\Lambda(\gamma) = |\gamma I - A| = \gamma^2 - 3\gamma - 2$$

Notando que $p(\gamma)$ é dado por $p(\gamma) = 2\gamma^3 - 3\gamma^2 + \gamma - 1$, a divisão polinomial tem a forma

$$\begin{aligned} p(\gamma) &= \Lambda(\gamma)q(\gamma) + r(\gamma) \\ 2\gamma^3 - 3\gamma^2 + \gamma - 1 &= (\gamma^2 - 3\gamma - 2)q(\gamma) + r(\gamma) \end{aligned}$$

que tem como solução

$$q(\gamma) = 2\gamma + 3 \quad e \quad r(\gamma) = 14\gamma + 5$$

Consequentemente

$$p(A) = r(A) = 14A + 5I = \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 28 & 47 \end{bmatrix}$$

O teorema de Cayley-Hamilton também pode ser usado para demonstrar o método polinomial:

$$e^{At} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_{\ell}(t) A^{\ell}$$

em que os coeficientes $\alpha_{\ell}(t)$ são obtidos do sistema de equações lineares dado por

$$(A.10) \quad \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Primeiro, defina o polinômio $p(\gamma)$ por

$$(A.11) \quad p(\gamma) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \beta_{\ell} \gamma^{\ell}, \quad \text{com} \quad \beta_{\ell} = \frac{t^{\ell}}{\ell!}$$

Assim, a matriz de transição de estado e^{At} , que é dada por

$$e^{At} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A^{\ell} t^{\ell}}{\ell!}$$

pode ser reescrita como $e^{At} = p(A)$.

Usando a divisão polinomial apresentada anteriormente, $p(\gamma) = \Lambda(\gamma)q(\gamma) + r(\gamma)$, e notando que $\Lambda(A) = 0$, obtém-se

$$p(A) = r(A) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_{\ell} A^{\ell}$$

Assim,

$$e^{At} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_{\ell} A^{\ell}$$

Para obter o sistema de equações lineares (A.10), que fornece os coeficientes α_{ℓ} , basta agora perceber que se γ for escolhido como sendo um autovalor da matriz A , ou seja, se $\gamma = \lambda_i(A)$, então $\Lambda(\lambda_i) = 0$, e consequentemente

$$(A.12) \quad p(\lambda_i) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_{\ell} \lambda_i^{\ell}$$

Por outro lado, sabe-se que a função exponencial tem a seguinte expansão em termos de uma série infinita:

$$e^x = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{\ell}}{\ell!}$$

Portanto, usando a definição de $p(\gamma)$, dada em (A.11), tem-se

$$(A.13) \quad p(\lambda_i) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^{\ell} t^{\ell}}{\ell!} = e^{\lambda_i t}$$

Finalmente, igualando (A.13) a (A.12), obtém-se

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_{\ell} \lambda_i^{\ell} = e^{\lambda_i t}$$

que representa a i -ésima linha do sistema (A.10), concluindo assim a demonstração.

A.4.1 Forma modal (diagonal)

Foi visto que para uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, o problema de autovalores e autovetores

$$Ax = \lambda x$$

fornece n autovalores λ_i e n correspondentes autovetores x_i . Usando as n soluções (λ_i, x_i) desse problema, o sistema de equações

$$\begin{aligned} Ax_1 &= \lambda_1 x_1 \\ Ax_2 &= \lambda_2 x_2 \\ &\vdots \\ Ax_n &= \lambda_n x_n \end{aligned}$$

pode ser reescrito como

$$A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Assim, definindo-se a matriz de autovetores por $\Sigma = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ e a matriz de autovalores por $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, obtém-se a forma matricial

$$A\Sigma = \Sigma\Lambda$$

Se a matriz de autovetores Σ for inversível, então será possível diagonalizar a matriz A , já que

$$\Lambda = \Sigma^{-1}A\Sigma$$

Nesse caso, as matrizes A e Λ são ditas **similares**. Por outro lado, uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que não for diagonalizável, ou seja, cuja matriz de autovetores Σ não for inversível, é denominada de **defectiva**.

Exemplo A.4.3 Considere as matrizes A_1 e A_2 do Exemplo A.4.1. Como a matriz A_1 já é diagonal, sua matriz de autovetores é $\Sigma_{A_1} = I$ e, portanto, inversível. Já a matriz de autovetores da matriz A_2 , dada por $\Sigma_{A_2} = [e \ e]$ com $e = [1 \ 0]^T$, claramente não é inversível. Assim, não é possível diagonalizar a matriz A_2 . A matriz A_2 está na forma canônica de Jordan, que é a representação “mais próxima” da forma diagonal possível de se obter, caso a matriz não seja diagonalizável (seja defectiva).

Observação A.4.2 Caso a matriz A tenha pares de autovalores complexos conjugados, esse autovalores aparecerão na diagonal da matriz Λ . Isso implicará que a matriz de autovetores Σ também será complexa. Porém, é possível obter uma decomposição real em que cada par complexo conjugado transforma-se num bloco- 2×2 real na diagonal, como mostra o Exemplo A.4.4.

Exemplo A.4.4 Para a matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} -14 & 5 \\ -4 & -10 \end{bmatrix}$$

as matrizes Σ e Λ são respectivamente dadas por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 + j4 & 2 - j4 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -12 + j4 & 0 \\ 0 & -12 - j4 \end{bmatrix}$$

Note que tanto Σ como Λ são matrizes complexas. Porém, é possível obter uma decomposição real, $A\bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}\bar{\Lambda}$, em que a diagonal principal de $\bar{\Lambda}$ conterá a parte real do autovalor e a diagonal secundária a parte imaginária. Para isso, basta realizar a seguinte transformação:

$$\bar{\Sigma} = \Sigma T^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Lambda} = T\Lambda T^{-1} = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -4 & -12 \end{bmatrix}$$

em que a matriz T é dada por

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix}$$

Observação A.4.3 Claramente, a matriz de autovetores Σ , do problema de autovalores e autovetores $A\Sigma = \Sigma\Lambda$, pode ser usada como matriz de transformação de similaridade (ver Seção 7.5) para representar o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

na forma modal

$$\begin{aligned}\dot{q}(t) &= \hat{A}q(t) + \hat{B}u(t), & q(0) &= q_0 \\ y(t) &= \hat{C}q(t) + \hat{D}u(t)\end{aligned}$$

em que $\hat{A} = \Sigma^{-1}A\Sigma$ é uma matriz diagonal, $\hat{B} = \Sigma^{-1}B$, $\hat{C} = C\Sigma$, $\hat{D} = D$ e $q(t) = \Sigma^{-1}x(t)$. A forma modal (diagonal) foi apresentada na Seção 7.9.1.

Exemplo A.4.5 Suponha que as matrizes do sistema sejam

$$A = \begin{bmatrix} -14 & 5 \\ -4 & -10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = 7$$

De acordo com o resultado do Exemplo A.4.4, as matrizes Σ e Λ são complexas. Assim, a forma diagonal usando essas matrizes também será complexa. No entanto, foi demonstrado que é possível obter uma decomposição real (porém não mais diagonal), como segue:

$$\hat{A} = \bar{\Sigma}^{-1}A\bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -4 & -12 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \bar{\Sigma}^{-1}B = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 4 \\ -17 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = C\bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} 23 & -4 \end{bmatrix}, \quad \hat{D} = D = 7$$

A.4.2 Forma de Jordan

Se a matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não for diagonalizável, então sabe-se que será possível representá-la na forma canônica de Jordan através de uma transformação de similaridade, ou seja, existe uma matriz T inversível tal que

$$T^{-1}AT = J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_q)$$

em que cada bloco

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$$

para $i = 1, \dots, q$, é um bloco de Jordan de dimensão $n_i \times n_i$ com autovalor λ_i . Note que a dimensão da matriz A é $n = \sum_{i=1}^q n_i$. Claramente, essa decomposição não é única, já que é possível permutar de forma arbitrária a posição dos blocos de Jordan na matriz J . Note também que $\det(sI - J_i(\lambda_i)) = (s - \lambda_i)^{n_i}$, e assim pode-se associar tais polinômios com cada bloco de Jordan. Esses polinômios são denominados de **divisores elementares** da matriz A . Na forma canônica de Jordan², a matriz de transição de estado e^{At} fica sendo

$$e^{At} = e^{TJT^{-1}t} = Te^{Jt}T^{-1}, \quad \text{com } e^{Jt} = \text{diag}(e^{J_1t}, e^{J_2t}, \dots, e^{J_qt})$$

em que a exponencial de cada bloco e^{J_it} é facilmente calculada (ver Exercícios 7.11.15 e 7.11.18).

Observação A.4.4 Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ uma matriz complexa. Então, existe uma matriz não singular $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $A = TJT^{-1}$. Se A for real, com autovalores reais, então T pode ser escolhido real.

Observação A.4.5 Note que é possível ter múltiplos blocos de Jordan com os mesmos autovalores. Por exemplo, a matriz dada por

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda} \end{bmatrix}$$

possui três blocos de Jordan, todos tendo o mesmo autovalor λ ; o primeiro de ordem 1, o segundo de ordem 2 e o terceiro também de ordem 1.

²É oportuno enfatizar que os métodos para calcular a forma canônica de Jordan são numericamente mal condicionados. Porém, do ponto de vista teórico, essa decomposição ilustra conceitos fundamentais.

Será analisado em seguida o problema de autovalor e autovetor associado à representação na forma canônica de Jordan. Particionando-se a matriz de transformação de similaridade T na forma

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & \cdots & T_q \end{bmatrix}$$

em que os $T_i \in \mathbb{C}^{n \times n_i}$ representam as colunas de T associadas ao i -ésimo bloco de Jordan, obtém-se

$$AT_i = T_i J_i$$

Agora, denotando as n_i colunas da matriz T_i por

$$T_i = \begin{bmatrix} v_{i1} & v_{i2} & \cdots & v_{in_i} \end{bmatrix}$$

percebe-se que

$$Av_{i1} = \lambda_i v_{i1} \implies (A - \lambda_i I)v_{i1} = 0$$

Portanto, a primeira coluna de T_i é um autovetor associado ao autovalor λ_i . Para os outros vetores v_{ij} com $j = 2, \dots, n_i$, tem-se

$$\begin{aligned} Av_{ij} = v_{i,j-1} + \lambda_i v_{ij} &\implies \begin{aligned} (A - \lambda_i I)v_{i2} &= v_{i1}, & (A - \lambda_i I)v_{i4} &= v_{i3} \\ (A - \lambda_i I)v_{i3} &= v_{i2} & & \vdots \end{aligned} \end{aligned}$$

Os vetores v_{i1}, \dots, v_{in_i} são denominados de **autovetores generalizados**. Esses vetores podem ser usados como uma base para uma solução geral do sistema homogêneo

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

Para isso, basta notar que para cada cadeia de Jordan de ordem n_i , corresponderá n_i soluções linearmente independentes, tendo a forma

$$\begin{aligned} x_{i1}(t) &= e^{\lambda_i t} v_{i1} \\ x_{i2}(t) &= e^{\lambda_i t} (tv_{i1} + v_{i2}) \\ x_{i3}(t) &= e^{\lambda_i t} \left(\frac{t^2}{2} v_{i1} + tv_{i2} + v_{i3} \right) \\ &\vdots \\ x_{in_i}(t) &= e^{\lambda_i t} \left(\frac{t^{n_i-1}}{n_i-1} v_{i1} + \cdots + tv_{in_i-1} + v_{in_i} \right) \end{aligned}$$

Donde observa-se que as trajetórias se desenvolvem na *extensão linear* (*casco linear* ou *span*) dos autovetores generalizados. Os coeficientes dessa solução têm a forma $p(t)e^{\lambda t}$, em que $p(t)$ é um polinômio qualquer. Tais soluções são chamadas de **modos generalizados** do sistema. Note que uma matriz fundamental $X(t)$, do sistema homogêneo $\dot{x}(t) = Ax(t)$, pode ser composta pelas n_i soluções correspondentes a cada um dos q blocos de Jordan, ou seja,

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n_1} & x_{21} & \cdots & x_{2n_2} & \cdots & x_{q1} & \cdots & x_{qn_q} \end{bmatrix}$$

Como visto na Seção A.3, uma solução $x(t)$ qualquer do sistema homogêneo $\dot{x}(t) = Ax(t)$ pode ser expressa pela combinação linear de n soluções linearmente independentes. Para esse fim, pode-se usar os modos generalizados, mais precisamente, as colunas da matriz fundamental $X(t)$, ou seja, $x(t) = X(t)c$, com o vetor c a ser determinado pela condição inicial. Fazendo $t = 0$, tem-se $x(0) = X(0)c$ e, assim, $c = X^{-1}(0)x_0$. Por fim, a matriz de transição de estado pode ser calculada usando-se a expressão

$$e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$$

Portanto,

$$x(t) = e^{At}x_0 = X(t)X^{-1}(0)x_0 = X(t)c, \quad c = X^{-1}(0)x_0$$

Exemplo A.4.6 Seja a matriz A , sua forma de Jordan J e a matriz de similaridade T , tal que $AT = TJ$, dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Percebe-se que os autovalores são $\lambda_1 = 1$, de multiplicidade 1, $\lambda_2 = 3$, de multiplicidade 3 e $\lambda_3 = 3$, de multiplicidade 1, e assim existem três blocos de Jordan. O primeiro $J_1(\lambda_1)$ de ordem 1, o segundo $J_2(\lambda_2)$ de ordem 3 e o terceiro $J_3(\lambda_3)$ de ordem 1. Portanto, uma matriz fundamental do sistema homogêneo $\dot{x}(t) = Ax(t)$ pode ser obtida a partir dos autovetores generalizados como segue:

- Usando o bloco de Jordan $J_1(\lambda_1)$, tem-se

$$x_{11}(t) = e^t v_{11}, \quad v_{11} = T_1$$

- Usando o bloco de Jordan $J_2(\lambda_2)$, tem-se

$$x_{21}(t) = e^{3t} v_{21}$$

$$x_{22}(t) = e^{3t} (tv_{21} + v_{22})$$

$$x_{23}(t) = e^{3t} \left(\frac{t^2}{2} v_{21} + tv_{22} + v_{23} \right)$$

em que $v_{21} = T_{21}$, $v_{22} = T_{22}$, $v_{23} = T_{23}$.

- Usando o bloco de Jordan $J_3(\lambda_3)$, tem-se

$$x_{31}(t) = e^{3t} v_{31}, \quad v_{31} = T_3$$

Assim, uma matriz fundamental $X(t)$, tal que $\dot{X}(t) = AX(t)$, é dada por

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e^{3t} & e^{3t}(t+1) & e^{3t} \left(\frac{t^2}{2} + t \right) & -e^{3t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & -e^{3t} & -te^{3t} & -\frac{t^2 e^{3t}}{2} & e^{3t} \\ 0 & -e^{3t} & e^{3t}(1-t) & e^{3t} \left(t - \frac{t^2}{2} \right) & 0 \\ e^t & 0 & 0 & e^{3t} & 0 \end{bmatrix}$$

Note que qualquer solução $x(t)$ do sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ pode ser descrita pela combinação linear das colunas da matriz $X(t)$, ou seja,

$$x(t) = c_{11}x_{11}(t) + c_{21}x_{21}(t) + c_{22}x_{22}(t) + c_{23}x_{23}(t) = X(t)c$$

Uma vez fornecida a condição inicial, o vetor c é diretamente obtido da expressão $c = X^{-1}(0)x_0$.

Para esse exemplo, a matriz de transição de estado, do sistema na forma de Jordan $\dot{q} = Jq$, é dada por

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} & \frac{t^2 e^{3t}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} & te^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

que fornece a matriz de transição de estado do sistema homogêneo $\dot{x} = Ax$, dada por

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1} = \begin{bmatrix} e^{3t}(t+1) & \frac{te^{3t}(t+2)}{2} & te^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 & 0 & 0 \\ -te^{3t} & -\frac{t^2 e^{3t}}{2} & -e^{3t}(t-1) & 0 & 0 \\ -te^{3t} & -\frac{te^{3t}(t-2)}{2} & -te^{3t} & e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} - e^t & 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Ambos sistemas estão relacionados pela mudança de variável $x = Tq$. Note que a matriz de transição de estado também pode ser calculada usando-se a matriz fundamental via a expressão $e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$.

A.5 Aproximação de Padé

É interessante observar que a função de transferência do Exemplo 5.8.2 não é racional, devido ao termo exponencial, que representa um atraso (delay) puro. Uma aproximação racional que é frequentemente utilizada para a função e^{-sT} é obtida pela fórmula de Padé de ordem N dada por

$$e^{-Ts} \approx \frac{R_N(-Ts)}{R_N(Ts)}$$

com

$$R_N(x) = \sum_{k=0}^N x^k \frac{(2N-k)!N!}{(2N)!k!(N-k)!}$$

A Tabela A.1 apresenta essa aproximação para alguns valores de N e a Figura A.2 apresenta a resposta ao degrau para as aproximações de Padé de ordem 2 (G_2), de ordem 5 (G_5) e de ordem 30 (G_{30}), com $T = 1$.

Tabela A.1: Aproximação de Padé de ordem N .

N	Aproximação $G_N(s)$ de e^{-Ts}
1	$\frac{2 - sT}{2 + sT}$
2	$\frac{12 - 6sT + (sT)^2}{12 + 6sT + (sT)^2}$
3	$\frac{120 - 60sT + 12(sT)^2 - (sT)^3}{120 + 60sT + 12(sT)^2 + (sT)^3}$
4	$\frac{1680 - 840sT + 180(sT)^2 - 20(sT)^3 + (sT)^4}{1680 + 840sT + 180(sT)^2 + 20(sT)^3 + (sT)^4}$
5	$\frac{30240 - 15120sT + 3360(sT)^2 - 420(sT)^3 + 30(sT)^4 - (sT)^5}{30240 + 15120sT + 3360(sT)^2 + 420(sT)^3 + 30(sT)^4 + (sT)^5}$

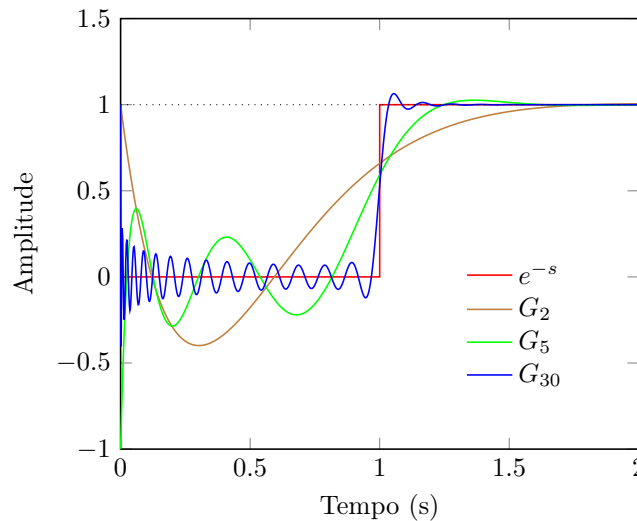


Figura A.2: Resposta ao degrau para as aproximações de Padé de ordem 2, 5 e 30, com $T = 1$.

A.6 Inversa da transformada \mathcal{Z} usando métodos computacionais

Esta seção apresenta dois métodos computacionais para calcular a inversa da transformada \mathcal{Z} de uma função $F(z)$ qualquer. No primeiro método, a inversa $f(k)$ é obtida através da resposta ao impulso de $F(z)$, vista como uma função de transferência. No segundo método, $F(z)$ é reescrita como uma equação de diferenças, cuja solução fornece $f(k)$.

A.6.1 Inversa da transformada \mathcal{Z} através da resposta ao impulso

Suponha que se deseje calcular a inversa $f(k)$ de uma função $F(z)$ qualquer. O primeiro passo é imaginar $F(z)$ como sendo uma função de transferência entre uma saída $Y(z)$ e uma entrada $X(z)$, ou seja

$$Y(z) = F(z)X(z)$$

Lembrando agora que a transformada \mathcal{Z} do impulso unitário $x(k) = \delta(k)$ é $X(z) = 1$, tem-se

$$Y(z) = F(z) \quad \Longleftrightarrow \quad y(k) = f(k)$$

Percebe-se, portanto, que para calcular $f(k)$ basta calcular a resposta ao impulso da função $F(z)$.

Por exemplo, suponha que $F(z)$ seja dada por

$$(A.14) \quad F(z) = \frac{2z + 3}{z^2 + 1.4z + 0.5}$$

Para efetuar esse cálculo usando o Matlab, procede-se como segue:

1. Define-se a entrada impulsiva $x(k) = \delta(k)$ com N pontos por

```
N = 20
x = [1 zeros(1,N)];
```

2. Define-se o numerador e o denominador de $F(z)$ como segue

```
num = [0 2.0 3.0];
den = [1 1.4 0.5];
```

3. Assim, a resposta $y(k) = f(k)$ é obtida através do comando

```
y = filter(num,den,x);
```

4. A saída desse comando, fornece a sequência de pontos:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 2.0, \quad y(2) = 0.2, \quad y(3) = -1.28, \quad y(4) = 1.6920, \quad y(5) = -1.7288, \dots$$

5. Para visualizar graficamente essa sequência de pontos, pode-se usar o comando

```
stem(0:N,y,'filled')
```

que apresentará o gráfico abaixo.

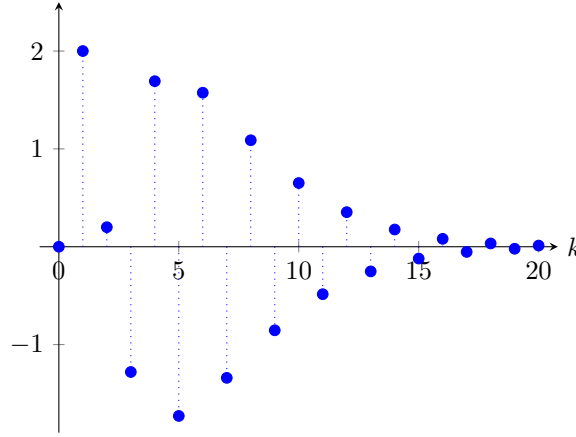


Figura A.3: Inversa da transformada \mathcal{Z} de $F(z) = (2z + 3)/(z^2 + 1.4z + 0.5)$.

A.6.2 Inversa da transformada \mathcal{Z} resolvendo uma equação de diferenças

De forma alternativa, pode-se calcular numericamente a inversa da transformada \mathcal{Z} de uma função $F(z)$ resolvendo-se uma equação de diferenças. Para aplicar o método, o primeiro passo é imaginar, novamente, a função $F(z)$ como sendo a função de transferência entre uma entrada $X(z)$ e uma saída $Y(z)$, ou seja

$$Y(z) = F(z)X(z)$$

Agora, como $F(z)$ é uma função racional tendo a forma

$$F(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n}$$

obtém-se

$$z^n Y(z) + a_1 z^{n-1} Y(z) + \cdots + a_{n-1} z Y(z) + a_n Y(z) = b_0 z^m X(z) + b_1 z^{m-1} X(z) + \cdots + b_{m-1} z X(z) + b_m X(z)$$

Para simplificar a exposição do método em consideração, será usada a função (A.14) da seção anterior, dada por

$$F(z) = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}, \quad b_1 = 2, \quad b_2 = 3, \quad a_1 = 1.4, \quad a_2 = 0.5$$

Dessa forma, tem-se

$$(A.15) \quad z^2 Y(z) + a_1 z Y(z) + a_2 Y(z) = b_1 z X(z) + b_2 X(z)$$

Usando agora a propriedade do *deslocamento em avanço*, dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f(k)] &= F(z) & F(z) &= \mathcal{Z}[f(k)] \\ \mathcal{Z}[f(k+1)] &= zF(z) - zf(0) & \iff & zF(z) = \mathcal{Z}[f(k+1)] + zf(0) \\ \mathcal{Z}[f(k+2)] &= z^2 F(z) - z^2 f(0) - zf(1) & & z^2 F(z) = \mathcal{Z}[f(k+2)] + z^2 f(0) + zf(1) \end{aligned}$$

a expressão (A.15) pode ser equivalentemente reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[y(k+2)] + z^2 y(0) + zy(1) + a_1 (\mathcal{Z}[y(k+1)] + zy(0)) + a_2 \mathcal{Z}[y(k)] \\ = b_1 (\mathcal{Z}[x(k+1)] + zx(0)) + b_2 \mathcal{Z}[x(k)] \end{aligned}$$

Reagrupando os termos dessa expressão, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_2 y(k) - b_1 x(k+1) - b_2 x(k)] \\ + z^2 y(0) + zy(1) + a_1 zy(0) - b_1 zx(0) = 0 \end{aligned}$$

Note que essa equação é composta pela soma de duas parcelas: uma função de $\mathcal{Z}[\cdot]$ e a outra função das condições iniciais. Portanto, a equação de diferenças a ser resolvida é dada por

$$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_2 y(k) = b_1 x(k+1) + b_2 x(k), \quad k \geq 0$$

cujas condições iniciais devem satisfazer

$$z^2 y(0) + z(y(1) + a_1 y(0) - b_1 x(0)) = 0$$

Como essa equação deve ser satisfeita para todas as potências de z , de forma independente, tem-se

$$y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y(1) + a_1 y(0) - b_1 x(0) = 0 \quad \rightarrow \quad y(1) = b_1$$

em que foi usado o fato de que $x(0) = 1$, já que $x(k)$ é um impulso. Observe que a condição inicial é escolhida de tal forma que sua contribuição seja nula, já que $f(k) = y(k)$ é dada apenas pela resposta ao impulso.

Resumindo, a equação de diferenças a ser resolvida é dada por

$$(A.16) \quad y(k+2) + 1.4y(k+1) + 0.5y(k) = 2x(k+1) + 3x(k), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2, \quad k \geq 0$$

com $x(k) = \delta(k)$. Essa equação pode agora ser resolvida facilmente através de um algoritmo numérico recursivo, como, por exemplo, o descrito abaixo:

```
N = 20;
y = [0 2 zeros(1,N-2)];
for i = 1:N,
    y(i+2) = -1.4*y(i+1) - 0.5*y(i) + 3*(i==1);
end
```

Observação A.6.1 Os dois métodos computacionais apresentados acima fornecem apenas a sequência $\{f(k)\}$. Para se obter uma solução analítica, pode-se calcular a inversa de $F(z)$ usando a expansão em frações parciais ou ainda calcular uma solução de forma fechada da respectiva equação de diferenças. Por exemplo, a solução da equação de diferenças de segunda ordem não homogênea (A.16) é dada pela soma das soluções homogênea e forçada. A solução homogênea (como descrito na Seção 4.3.3) é dada por

$$y_h(k) = -j10\lambda_1^k + j10\lambda_2^k = 20 \times 2^{-k/2} \sin(k\theta), \quad k \geq 0$$

com $\lambda_1 = (-7+j)/10$, $\lambda_2 = (-7-j)/10$ e $\theta = \pi - \tan^{-1}(1/7)$. Já a solução forçada para o impulso é dada por

$$y_f(k) = (-3+j21)\lambda_1^k + (-3-j21)\lambda_2^k = -2 \times 2^{-k/2} (3 \cos(k\theta) + 21 \sin(k\theta)), \quad k \geq 1$$

Portanto, a sequência $f(k)$ é dada por

$$f(k) = y_h(k) + y_f(k) = -2 \times 2^{-k/2} (3 \cos(k\theta) + 11 \sin(k\theta)) \mu(k-1)$$

A.7 Produto interno e normas de sinais

Para $x(t)$ e $y(t)$, sinais complexos contínuos por partes, pode-se definir o produto interno como

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{y(t)} dt$$

em que $\overline{y(t)}$ denota o conjugado de $y(t)$. Pode-se mostrar que o produto interno satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\langle x(t) + y(t), z(t) \rangle = \langle x(t), z(t) \rangle + \langle y(t), z(t) \rangle$

2. $\langle \alpha x(t), y(t) \rangle = \alpha \langle x(t), y(t) \rangle$
3. $\langle x(t), y(t) \rangle = \overline{\langle y(t), x(t) \rangle}$
4. $\langle x(t), x(t) \rangle \geq 0$
5. $\langle x(t), x(t) \rangle = 0 \iff x(t) = 0$

O produto interno é utilizado para definir ortogonalidade entre sinais. A função $x(t)$ será ortogonal à função $y(t)$ se o produto interno for nulo, ou seja, se

$$\langle x(t), y(t) \rangle = 0$$

Se $x(t)$ e $y(t)$ forem ortogonais, então (Teorema de Pitágoras):

$$\|x(t) + y(t)\|^2 = \|x(t)\|^2 + \|y(t)\|^2$$

Seja um sinal $x(t)$ contínuo por partes. Sua norma deve satisfazer:

1. $\|x(t)\| \geq 0$
2. $\|x(t)\| = 0 \iff x(t) = 0$
3. $\|\alpha x(t)\| = |\alpha| \|x(t)\|$
4. $\|x(t) + y(t)\| \leq \|x(t)\| + \|y(t)\|$ (desigualdade triangular)
5. $\|\langle x(t), y(t) \rangle\| \leq \|x(t)\| + \|y(t)\|$ (desigualdade de Schwarz)
6. $\langle x(t), y(t) \rangle + \langle y(t), x(t) \rangle \leq 2 \|x(t)\| \|y(t)\|$ (desigualdade de Cauchy-Schwarz)

O produto escalar pode ser usado para definir uma norma. A norma induzida pelo produto interno é dada por

$$\|x(t)\| = \sqrt{\langle x(t), x(t) \rangle} \implies \|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

A.7.1 Normas de sinais contínuos

1. Norma-1. A norma-1 de um sinal $x(t)$ é a integral do seu valor absoluto dado por

$$\|x(t)\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$$

2. Norma-2. A norma-2 do sinal $x(t)$ é dada por

$$\|x(t)\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

Exemplo A.7.1 Suponha que o sinal $x(t)$ é a corrente através de um resistor de 1Ω . Então, a potência instantânea é dada por $|x(t)|^2$ e a energia total é a integral dessa potência, ou seja, $\|x(t)\|_2^2$.

3. Norma- ∞ . A norma ∞ de um sinal é o máximo valor absoluto:

$$\|x(t)\|_{\infty} = \sup_t |x(t)|$$

Exemplo A.7.2 Seja $x(t) = (1 - e^{-t})$ para $t \geq 0$ e $x(t) = 0$ para $t < 0$. Então

$$\|x(t)\|_{\infty} = \sup_{t \geq 0} |1 - e^{-t}| = 1$$

4. Potência média. É a média sobre o tempo da potência instantânea:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Se esse valor for finito, então o valor rms do sinal será definido como

$$\text{pow}(x) = \text{rms}(x) = \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

Observe que o valor rms não é uma norma, já que um sinal $x(t) \neq 0$ pode ter valor $\text{pow}(x) = 0$.

Exemplo A.7.3 Se $\|x(t)\|_2 < \infty$, então $x(t)$ será um sinal de potência nula, ou seja, $\text{pow}(x) = 0$.

Prova. Note que

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \leq \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \|x(t)\|_2^2$$

Assim, como $\|x(t)\|_2 < \infty$ por hipótese, o lado direito tende a zero com $T \rightarrow \infty$ e portanto conclui-se que $\text{pow}(x) = 0$. ■

A.7.2 Normas de sinais discretos

1. Norma-1. A norma-1 da sequência $x(n)$ é dada por

$$\|x(k)\|_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|$$

2. Norma-2. A norma-2 de $x(k)$ é dada por

$$\|x(k)\|_2 = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 \right)^{1/2}$$

3. Norma- ∞ . A norma- ∞ de $x(k)$ é dada por

$$\|x(k)\|_{\infty} = \sup_k |x(k)|$$

A.8 Tabela de transformadas de Laplace

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
$e^{\alpha t} f(t)$	$F(s - \alpha)$	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$f(t - \alpha)\mu(t - \alpha)$	$e^{-\alpha s} F(s), \alpha \geq 0$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(s - a)(s - b)}$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$	$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}$	$\frac{s}{(s - a)(s - b)}$
$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) -$	te^{at}	$\frac{1}{(s - a)^2}$
	$\dots - f^{(n-1)}(0)$		
$\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$	$F(s)G(s)$	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(\tau)d\tau$	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}$
$f(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$	$e^{at} \sinh \omega t$	$\frac{\omega}{(s - a)^2 - \omega^2}$
1	$\frac{1}{s}$	$e^{at} \cosh \omega t$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 - \omega^2}$
$\mu(t - a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$\delta(t)$	1	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$\delta(t - t_0)$	e^{-st_0}	$t \sinh \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 - \omega^2)^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t \cosh \omega t$	$\frac{s^2 + \omega^2}{(s^2 - \omega^2)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan \frac{a}{s}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$
$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$		

A.9 Transformada bilateral de Laplace

A transformada unilateral de Laplace, como definida no Capítulo 3, foca no comportamento da função $f(t)$ para valores não negativos de tempo, $t \geq 0$. Em contraste, a transformada bilateral de Laplace, que considera todo o eixo do tempo, é definida como

$$\hat{F}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Evidentemente, a região de convergência dessa transformada é diferente da versão unilateral.

A transformada bilateral é útil para análises envolvendo funções definidas em todo o eixo do tempo, incluindo aquelas que não são causais. No entanto, em sistemas físicos, onde os sinais são geralmente causais, a transformada unilateral é frequentemente preferida devido às suas propriedades mais simples para o cálculo de transformadas inversas.

Para ilustrar algumas dessas diferenças, considere a seguinte função $f(t)$ dada por

$$f(t) = e^{-|t|} = e^{-t}\mu(t) + e^t\mu(-t)$$

Sua transformada bilateral é dada por

$$\hat{F}(s) = -\frac{2}{s^2 - 1}, \quad \text{se } -1 < \text{Re}(s) < 1$$

Por outro lado, a transformada unilateral de $f(t)$ é dada por

$$F(s) = \frac{1}{s + 1}$$

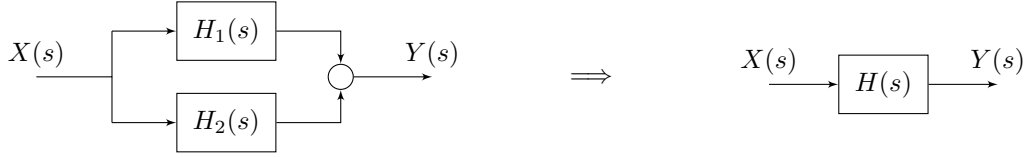
enquanto que a transformada unilateral de $(e^{-t} - e^t)\mu(t)$ fornece:

$$\mathcal{L}[(e^{-t} - e^t)\mu(t)] = -\frac{2}{s^2 - 1}$$

A.10 Operações básicas com diagramas de blocos

A seguir, são apresentadas algumas operações básicas com diagramas de blocos.

1. Considere o diagrama que representa a *conexão em paralelo* de duas funções de transferência H_1 e H_2 .



Para essa configuração, o sinal de saída é dado por

$$Y = H_1X + H_2X = (H_1 + H_2)X$$

Assim, a função de transferência equivalente é claramente dada por

$$H = H_1 + H_2$$

2. Considere agora o diagrama que representa a *conexão em série* de duas funções de transferência H_1 e H_2 .



Para essa configuração, os sinais Y e Z são respectivamente dados por

$$Y = H_2Z \quad \text{e} \quad Z = H_1X$$

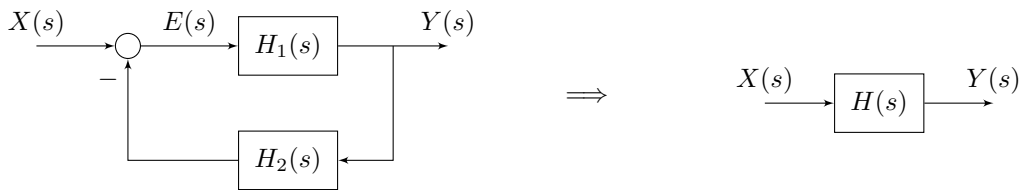
Substituindo uma equação na outra, obtém-se

$$Y = H_2H_1X$$

Portanto, a função de transferência equivalente é dada por

$$H = H_2H_1$$

3. Considere agora um caso mais complexo, que representa uma *malha de realimentação* (ou retroalimentação), também denominada de *feedback*.



Para determinar a função de transferência equivalente H , basta seguir o fluxo do sinal através do diagrama. Assim, tem-se que os sinais E e Y são respectivamente dados por

$$E = X - H_2Y \quad \text{e} \quad Y = H_1E$$

Substituindo uma equação na outra, obtém-se

$$Y = H_1(X - H_2Y) = H_1X - H_1H_2Y \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{H_1}{1 + H_1H_2}X$$

Portanto, a função de transferência equivalente é dada por

$$H = \frac{H_1}{1 + H_1H_2}$$

No Matlab, as conexões acima podem ser facilmente realizadas. Por exemplo, para H_1 e H_2 dados por

$$H_1(s) = \frac{2}{s+3} \quad \text{e} \quad H_2(s) = \frac{5s^2 - 2}{2s^2 + 3s}$$

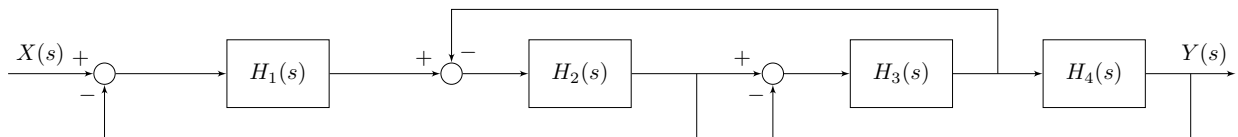
as conexões em paralelo, em série e em feedback podem ser obtidas através dos seguintes comandos:

```
n1 = [0 2]; % Define o numerador de H1
d1 = [1 3]; % Define o denominador de H1
% Define a função de transferência H1
H1 = tf(n1,d1);
% Define o numerador e denominador de H2
n2 = [5 0 -2];
d2 = [2 3 0];
% Define a função de transferência H2
H2 = tf(n2,d2);
% Realiza a conexão em paralelo de H1 e H2
Hp = parallel(H1,H2);
% Realiza a conexão em série de H1 e H2
Hs = series(H1,H2);
% Realiza a conexão em feedback de H1 e H2
Hf = feedback(H1,H2);
```

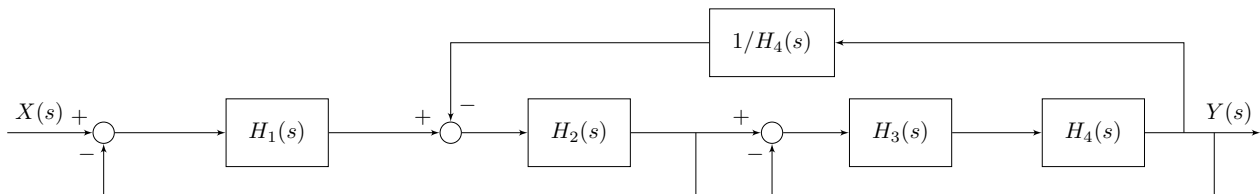
A.11 Simplificação de diagramas de blocos

A seguir, algumas manipulações comumente utilizadas para realizar a simplificação de diagramas de blocos são apresentadas através de um exemplo.

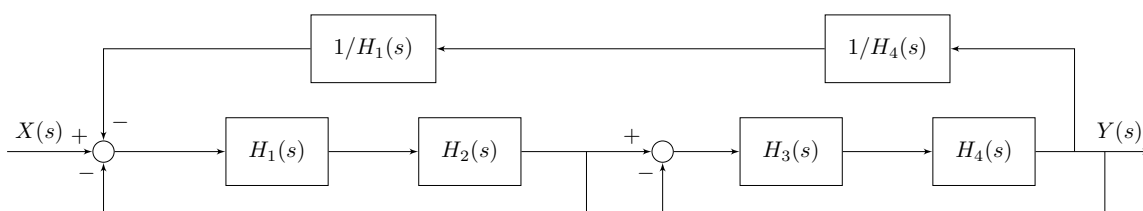
- Considere o diagrama de blocos abaixo.



- Movendo o laço direito da realimentação para fora da segunda malha, têm-se



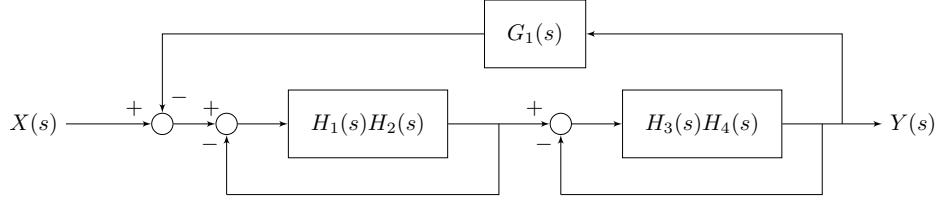
- Movendo agora o laço esquerdo da realimentação para fora da primeira malha, têm-se



- Simplificando as conexões em série e definindo o termo $G_1(s)$ como sendo

$$G_1(s) = \frac{1}{H_1(s)H_4(s)}$$

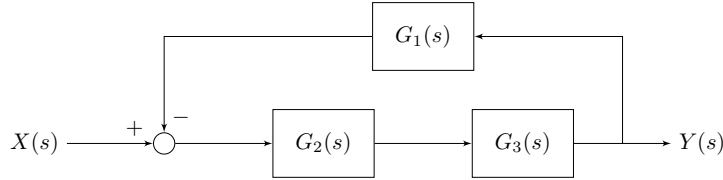
obtém-se o diagrama abaixo.



- Simplificando as duas malhas (internas) em feedback e definindo os termos $G_2(s)$ e $G_3(s)$ como sendo

$$G_2(s) = \frac{H_1(s)H_2(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} \quad \text{e} \quad G_3(s) = \frac{H_3(s)H_4(s)}{1 + H_3(s)H_4(s)}$$

tem-se



- Realizando a conexão em série e em seguida a retroalimentação, obtém-se

$$X(s) \longrightarrow \left[\frac{G_2(s)G_3(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_3(s)} \right] \longrightarrow Y(s)$$

- Finalmente, tem-se

$$X(s) \longrightarrow \left[\frac{H_1(s)H_2(s)H_3(s)H_4(s)}{1 + H_3(s)[H_2(s) + H_4(s)] + H_1(s)[H_2(s) + H_2(s)H_3(s)H_4(s)]} \right] \longrightarrow Y(s)$$

A.12 Realização de sistemas dinâmicos

A realização física de funções de transferência geralmente envolve parte de *software* (implementada num computador) e parte de *hardware* (implementada com o uso de circuitos analógicos/digitais com somadores, multiplicadores, atrasos, etc). No entanto, antes de se fazer a realização física em si, é conveniente levantar o diagrama de blocos do sistema.

O diagrama de blocos é uma representação gráfica das funções desempenhadas por cada componente e o fluxo de sinais entre eles. Por exemplo, considere o sistema contínuo no tempo dado por

$$(A.17) \quad m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

cuja função de transferência é

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

Para representar por diagrama de blocos a equação diferencial de segunda ordem acima, será necessário utilizar o bloco, ilustrado na Figura A.4, que representa o processo de integração:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t \dot{y}(\tau) d\tau$$

em que $y(0)$ é a condição inicial, que deverá ser fornecida no momento da simulação numérica do bloco.

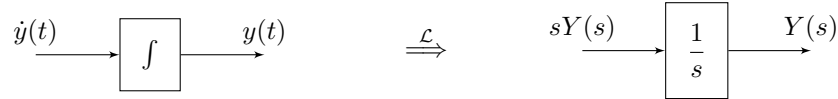
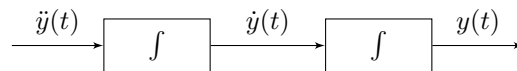


Figura A.4: Bloco integrador.

Como a equação diferencial é de 2ª ordem, serão necessários dois integradores, como ilustrado abaixo.



Notando agora que a equação diferencial (A.17) pode ser equivalentemente escrita como

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{m}(u(t) - c\dot{y}(t) - ky(t))$$

é fácil perceber que sua representação por diagrama de blocos tem a forma apresentada na Figura A.5.

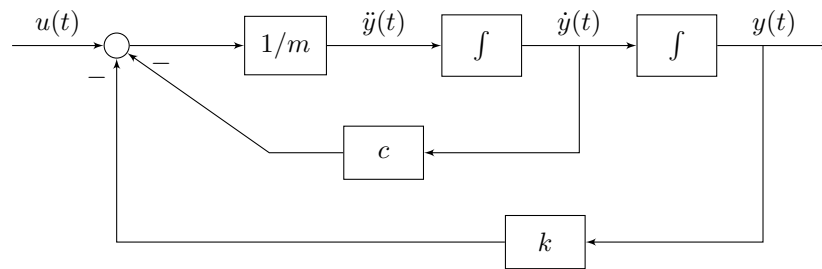


Figura A.5: Representação por diagrama de blocos de $m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$.

É oportuno enfatizar que é possível simular esse diagrama de blocos usando o *Simulink* do Matlab, que é um ambiente para construção e simulação de sistemas dinâmicos multi-domínio. A Figura A.6 apresenta um *printscreen* do diagrama de blocos acima editado no ambiente Simulink.

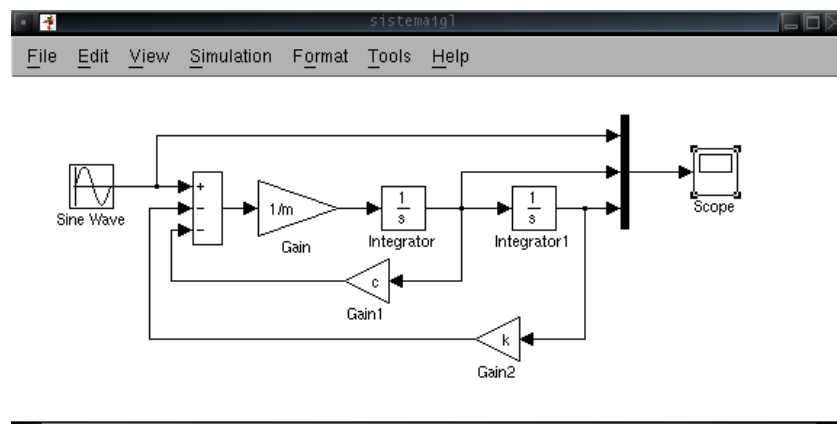


Figura A.6: Diagrama de blocos no ambiente Simulink.

A.12.1 Caso discreto

O caso discreto é análogo ao caso contínuo. Será necessário definir o bloco, ilustrado na Figura A.7, que representa o processo de atraso no tempo, ou seja: ao entrar no bloco a amostra $y(1)$, a saída será $y(0)$; ao

entrar $y(2)$, a saída será $y(1)$; e assim sucessivamente. A condição inicial $y(0)$ deverá ser fornecida no momento da simulação numérica do bloco.

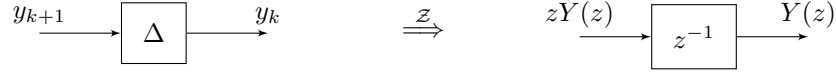


Figura A.7: Bloco atraso no tempo.

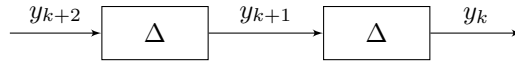
Por exemplo, para a equação a diferenças de segunda ordem

$$(A.18) \quad y(k+2) + a_1y(k+1) + a_2y(k) = u(k)$$

cuja função de transferência é

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z^2 + a_1z + a_2}$$

serão necessários dois blocos de atrasos ligados em série, como apresentado na figura abaixo.



Notando agora que a equação a diferenças (A.18) pode ser reescrita de forma equivalente como

$$y(k+2) = u(k) - a_1y(k+1) - a_2y(k)$$

é fácil perceber que sua representação por diagrama de blocos tem a forma apresentada na Figura A.8.

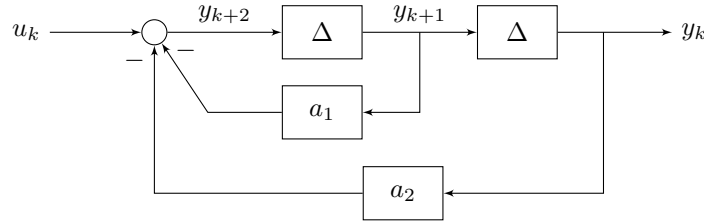


Figura A.8: Representação por diagrama de blocos de $y(k+2) + a_1y(k+1) + a_2y(k) = u(k)$.

A.13 Simulação numérica

As próximas seções apresentam distintas formas de simular numericamente o sistema físico, descrito por equação diferenciais ordinárias. Basicamente, é possível simular usando tanto a função de transferência bem como o modelo no espaço de estado. Em ambos os casos, é possível obter: a solução homogênea devido às condições iniciais; a solução forçada para uma excitação qualquer; e a solução completa.

A.13.1 Simulando usando a função de transferência

Para simular numericamente o sistema massa-mola-amortecedor, descrito pela equação diferencial de segunda ordem

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

cuja função de transferência é

$$(A.19) \quad H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

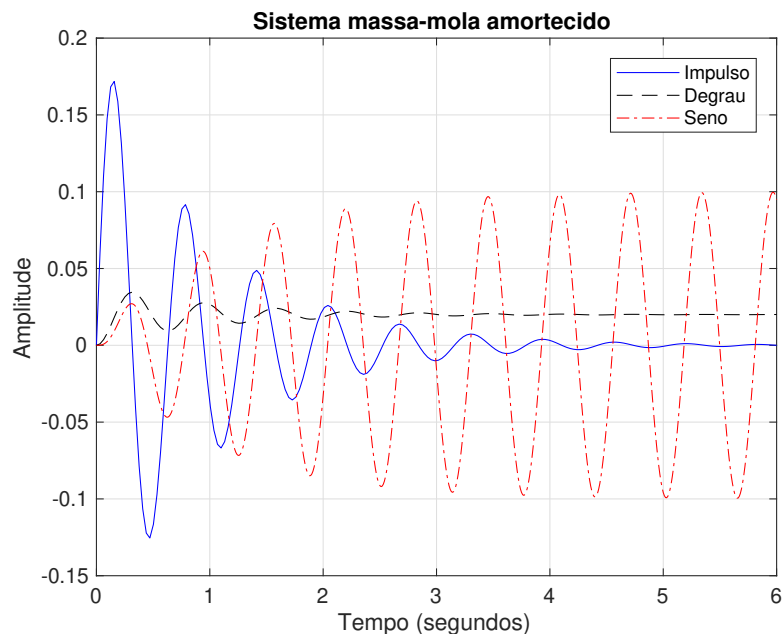
não é necessário usar o ambiente Simulink, pode-se usar diretamente a linha de comando do Matlab, como apresentado no código abaixo:

```

% Define os dados numéricos
m = 1/2; c = 1; k = 50;
% Define a função de transferência H(s)
H = tf([1],[m c k])
% Obtém a resposta ao impulso (6 segundos)
[y1,t1] = impulse(H,6);
% Obtém a resposta ao degrau (6 segundos)
[y2,t2] = step(H,6);
% Obtém a resposta ao seno com w=10 rad/s
t = 0:0.05:6; % gera o vetor de tempo (6 segundos)
u = sin(10*t); % gera a entrada u(t)
% Obtém a resposta ao seno (6 segundos)
[y3,t3] = lsim(H,u,t);
% Gera um gráfico com as três respostas
plot(t1,y1,'b-',t2,y2,'k--',t3,y3,'r-.'), grid
legend('Impulso','Degrau','Seno')
xlabel('Tempo (segundos)')
ylabel('Amplitude')
title('Sistema massa-mola amortecido')

```

A figura abaixo, apresenta a resposta ao impulso, ao degrau e ao seno, da função de transferência (A.19), do sistema mecânico massa-mola-amortecedor.



A seguir, são apresentados alguns outros comandos úteis:

```

% O comando 'zpk' gera uma função de transferência
% a partir dos polos, dos zeros e do ganho do sistema
% Seja H(s) = 20*(s+5)/((s+1)*(s+100));
H = zpk(-5,[-1 -100],20)
% O comando 'pole' retorna os polos
pole(H)
% O comando 'zero' retorna os zeros
zero(H)

```

```
% O comando 'damp' retorna: polos, frequência natural e amortecimento
damp(H)
% O comando 'zpkdata' retorna os polos, os zeros e o ganho de H(s)
[z,p,k] = zpkdata(H)
% O comando 'tfdata' retorna o numerador e o denominador de H(s)
[num,den] = tfdata(H,'v')
% O comando 'pzmap' plota a localização dos polos e zeros
pzmap(H)
% O comando 'dcgain' retorna o ganho DC de H(s)
dcgain(H)
```

A.13.2 Simulação numérica usando o espaço de estado

O Matlab possui um conjunto de integradores numéricos que podem ser usados para integrar uma equação diferencial qualquer, porém, a equação deve estar representada como um sistema de primeira. Por exemplo, para simular a seguinte equação diferencial de 2ª ordem

$$\ddot{y}(t) = -\frac{k}{m}y(t) - \frac{c}{m}\dot{y}(t) + \frac{1}{m}u(t)$$

é necessário representá-la como um sistema de equações de primeira ordem, definindo as variáveis $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$, como segue:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y} = -\frac{k}{m}(\underbrace{y}_{x_1}) - \frac{c}{m}(\underbrace{\dot{y}}_{x_2}) + \frac{1}{m}u \end{aligned}$$

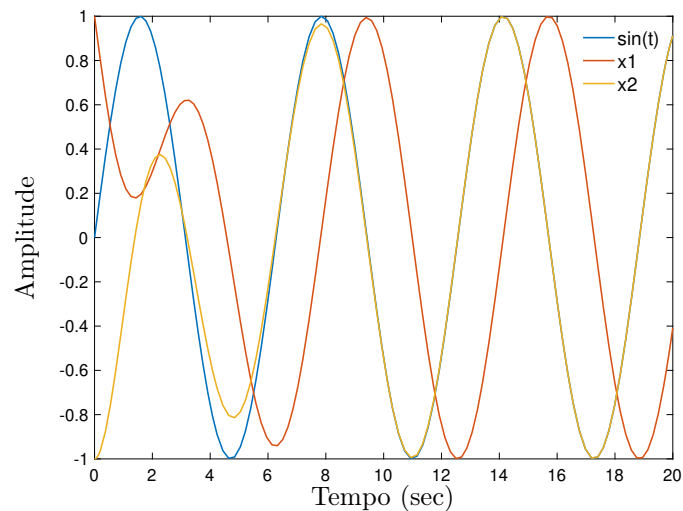
Em seguida, edita-se um arquivo (sistema1glode.m) com a função a ser integrada:

```
function dx = sistema1glode(t,x)
    % Define os dados numéricos
    m = 1; c = 1; k = 1;
    % Gera a entrada u(t)
    u = sin(10*t);
    % Define o sistema de equações de primeira ordem
    dx(1) = x(2);
    dx(2) = -k/m*x(1) - c/m*x(2) + u/m;
end
```

Agora, basta invocar na própria linha de comando o integrador usando a sintaxe:

```
tspan = [0 20]; % Simula de 0 a 20 segundos
ci = [1 -1]'; % Condição inicial: x1(0) = 1 e x2(0) = -1
[t,x] = ode45(@sistema1glode,tspan,ci);
% Gera um gráfico com u(t) e os estados x1(t) e x2(t)
plot(t,sin(t), t, x)
legend('sin(t)', 'x1', 'x2')
xlabel('Tempo (s)'), ylabel('Amplitude')
```

A figura abaixo apresenta o deslocamento $x_1(t) = y(t)$ e a velocidade $x_2(t) = \dot{y}(t)$.



Note que é possível reescrever as equações anteriores na seguinte forma matricial:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

conhecida como **espaço de estado**, dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u$$

Assim, a função anterior (sistema1glode.m) pode ser reescrita na forma matricial

```
function dx = sistema1glode(t,x)
    m = 1; c = 1; k = 1;
    u = sin(t);
    A = [ 0      1
          -k/m   -c/m];
    B = [0 1/m]';
    dx = A*x + B*u;
end
```

Evidentemente, nada muda em relação ao comando que deve ser executado na linha de comando do Matlab para integrar esse sistema:

```
tspan = [0 20]; ci = [1 -1]'; % Tempo e Condição inicial
[t,x]=ode45(@sistema1glode,tspan,ci);
```

Uma alternativa é utilizar o comando `ss()` com o sistema no espaço de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Para isso, é preciso definir a saída y do sistema. Suponha que se deseje medir o deslocamento da massa x_1 e o sinal $cx_2 - u$, ou seja:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ cx_2 - u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

Assim, as matrizes C e D são dadas por

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Agora, a resposta (de 0 a 10 segundos) para a condição inicial $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = -1$, para o impulso e para a entrada em degrau são obtidos como segue:

```

% Define dados numéricos
m = 1; c = 1; k = 1;
% Define as matrizes (A,B,C,D)
A = [0 1; -k/m -c/m]; B = [0 1/m]';
C = diag([1, c]); D = [0; -1];
% Gera o sistema H no espaço de estado
H = ss(A,B,C,D);
% Define as condições iniciais
x0 = [1 -1]';
% Obtém a resposta à condição inicial
[y1,t1] = initial(H,x0,10);
% Obtém a resposta ao impulso
[y2,t2] = impulse(H,x0,10);
% Obtém a resposta ao degrau
[y3,t3] = step(H,x0,10);

```

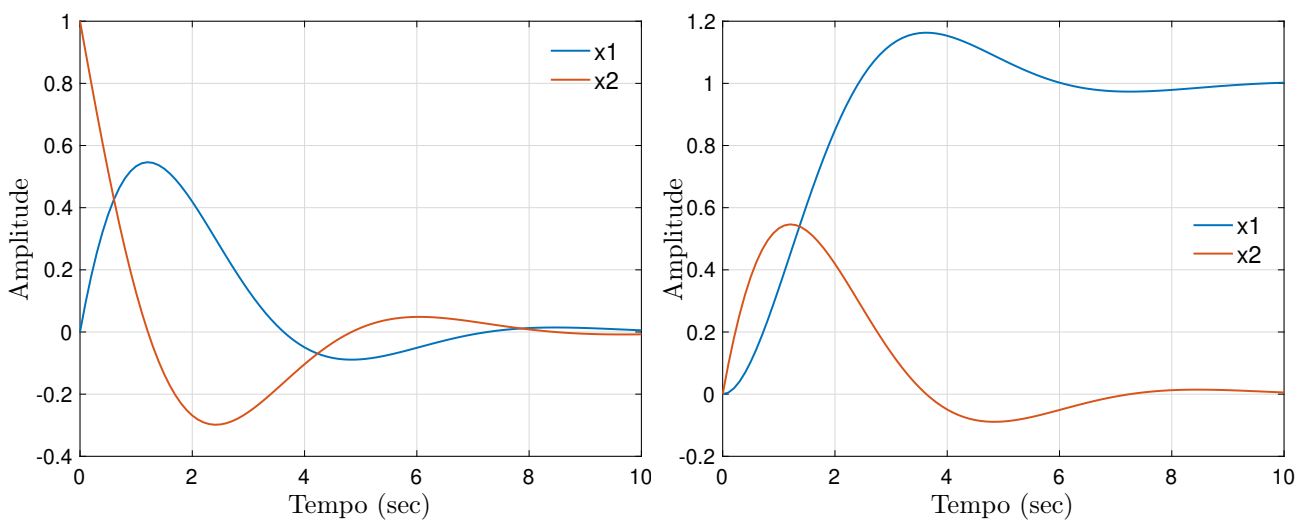
É oportuno enfatizar que é possível utilizar todos os comandos mencionados anteriormente: *step*, *impulse*, *lsim*, etc.. Por exemplo, para obter a resposta completa para a entrada $u(t) = \cos(5 \sin^2(t))$ e condição inicial $x(0) = [1 \ -1]^T$, basta usar o comando **lsim()** como segue:

```

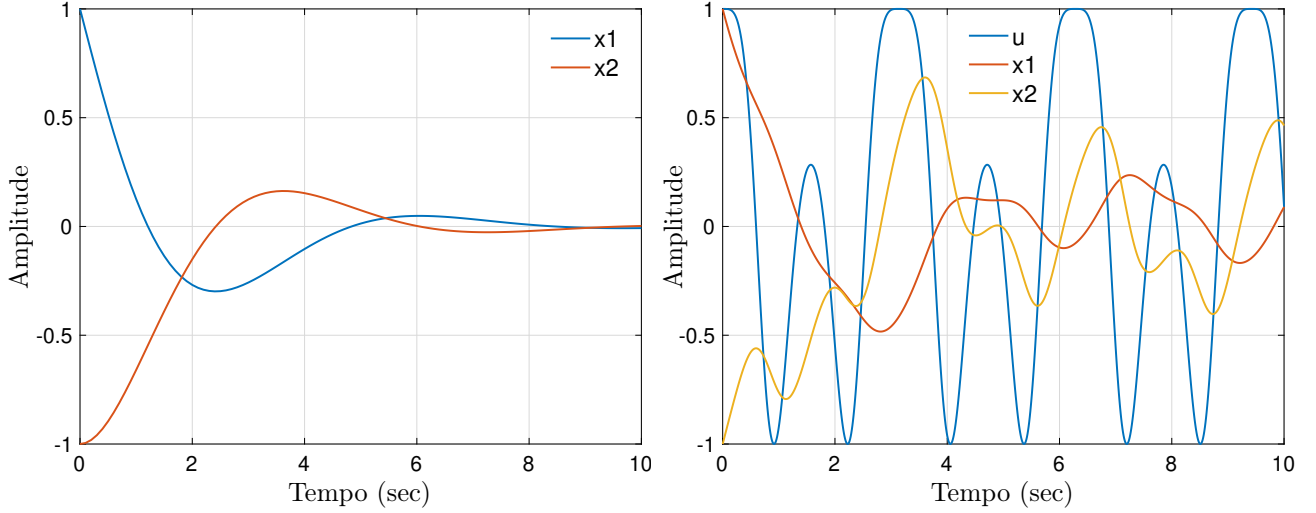
t = 0:0.01:10;
u = cos(5*sin(t).^2);
[y,t,x] = lsim(H,u,t,[1 -1]');

```

As figuras abaixo apresentam, respectivamente, a resposta ao impulso e ao degrau.



As figuras abaixo apresentam, respectivamente, a resposta à condição inicial $x_0 = [1 \ -1]^T$ e a resposta completa à entrada $u(t) = \cos(5 \sin^2(t))$ e condição inicial x_0 .



A.13.3 Método de integração de Euler

A seguir é apresentada uma descrição sucinta do método de integração de Euler para a resolução de uma equação diferencial ordinária.

O método de integração de Euler para a equação diferencial de 1ª ordem

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad x(t_0) = x_0$$

pode ser derivado usando a seguinte aproximação por série de Taylor:

$$x(t) = x(t_0) + \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=t_0} \Delta_t = x(t_0) + f(x(t_0), t_0) \Delta_t$$

em que $\Delta_t = t - t_0$ é o passo de integração; a discretização da escala de tempo t .

O processo iterativo de integração se dá através do cômputo de $x(t)$ para sucessivos instantes de tempo t_0, t_1, t_2, \dots , usando-se a expressão

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + f(x(t_i), t_i) \Delta_t$$

com Δ_t o passo de integração. Essa equação pode ser rescrita numa notação mais compacta como

$$x_{i+1} = x_i + f(x_i, t_i) \Delta_t$$

Como exemplo de aplicação do método de integração de Euler, suponha que se deseje integrar a equação diferencial do circuito RC dada por

$$(A.20) \quad \tau \dot{v}(t) + v(t) = g(t), \quad v(0) = v_0, \quad \tau = RC$$

Note que essa equação pode ser reescrita como

$$\dot{v}(t) = f(v, t) := -v(t)/\tau + g(t)/\tau$$

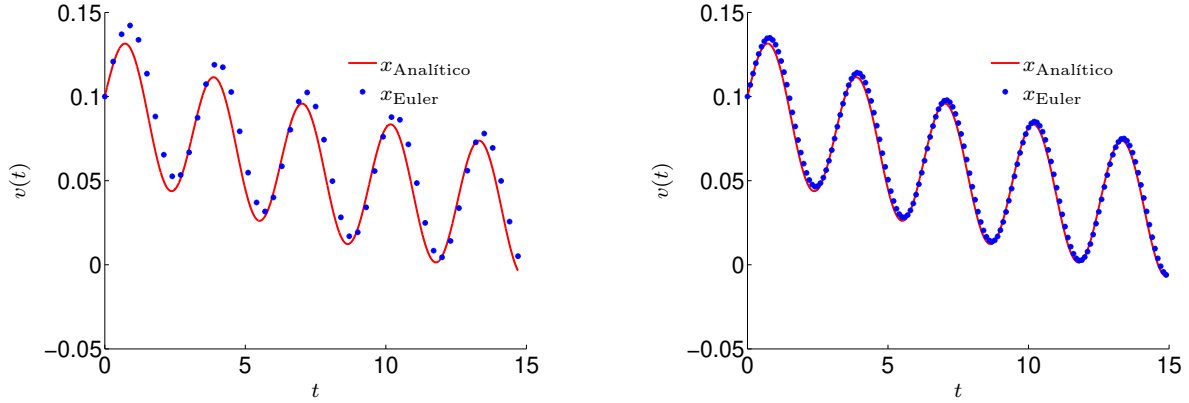
Assumindo que a escala de tempo está sendo discretizada usando-se o período $\Delta_t = t - t_0$, o método de Euler fornece a seguinte recursão:

$$(A.21) \quad v_{i+1} = v_i + f(v_i, t_i) \Delta_t = v_i(\tau - \Delta_t)/\tau + g(t_i) \Delta_t/\tau$$

Note que no passo $i = 0$, a tensão inicial é v_0 no instante de tempo $t_0 = 0$.

A figura abaixo apresenta a tensão $v(t)$ do circuito RC com $\tau = 13$, para uma tensão de entra $g(t) = \cos(2t)$ e tensão inicial $v_0 = 0.1$ [V]. A linha vermelha representa a solução analítica de (A.20), enquanto que a linha

azul é a solução numérica dada pela recursão (A.21), com $\Delta_t = 0.3$ (gráfico da esquerda) e $\Delta_t = 0.1$ (gráfico da direita).



É possível aplicar o método apresentado para um sistema de ordem superior. Basta descrevê-lo no espaço de estado. Por exemplo, para o sistema de 2^a ordem

$$(A.22) \quad \ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 g(t), \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0$$

é preciso reescrevê-lo como um sistema de 1^a ordem, definindo-se os estados

$$x = y, \quad v = \dot{y}$$

Assim, a equação acima pode ser reescrita, de forma equivalente, como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, v, t) := v \\ \dot{v} &= f_2(x, v, t) := -\omega_n^2 x - 2\zeta\omega_n v + \omega_n^2 g(t) \end{aligned}$$

Para esse sistema de equações de primeira ordem, o método de Euler fornece

$$(A.23) \quad \begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + f_1(x_i, v_i, t_i)\Delta_t \\ v_{i+1} &= v_i + f_2(x_i, v_i, t_i)\Delta_t \end{aligned}$$

A figura abaixo apresenta o estado $x(t)$, a solução $y(t)$ do sistema (A.22), para $\zeta = 0.3$, $\omega_n = 10$, $g(t) = \cos(2t)$ e condições iniciais $y_0 = -2$ e $\dot{y}_0 = -35$. A linha vermelha representa a solução analítica e a linha azul a solução numérica dada usando-se a recursão (A.23), com $\Delta_t = 0.03$ (gráfico da esquerda) e $\Delta_t = 0.01$ (gráfico da direita).

